ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ

ՀԱՏՈՐ **12** **№ 1**

«ՃԱՐՏԱՐԱԳԵՏ»
ԵՐԵՎԱՆ **2016**

Ընդգրկված է Հայաստանի Հանրապետության Բարձրագույն որակավորման հանձնաժողովի (ՀՀ ԲՈՀ) կողմից ընդունված թեկնածուական և դոկտորական ատենախոսությունների արդյունքների տպագրման համար ընդունելի պարբերականների ցանկում՝ «Մաթեմատիկա» և «Մանկավարժություն» մասնագիտությունների համար 23.03.2007:

ՀՏԴ 51

ԳՄԴ 22.1

Մ 151 **Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում:** - Եր.: ՀԱՊՀ «Ճարտարագետ» հրատ., 2016.- Հատոր 12, № 1.- 68 էջ:

Խմբագրության հասցեն՝ 0009, Երևան, Տերյան 105, ՀԱՊՀ, մասնաշենք 12, սենյակ 12202

Հեռ.: +(37410) 56-28-82

E-mail: mathdep@seua.am

Web: www.math.seua.am

facebook www.facebook.com/pages/Mathematics-in-High-School/339572519477837

ISSN 1829-3344

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF REPUBLIC OF ARMENIA
NATIONAL POLYTECHNIC UNIVERSITY OF ARMENIA

МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

ТОМ 12 № 1

MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL

VOLUME 12 № 1

«ЧАРТАРАГЕТ»
ЕРЕВАН 2016

«TCHARTARAGET»
YEREVAN 2016

Включен в список периодических изданий, допустимых для публикования результатов кандидатских и докторских диссертаций по специальностям: "Математика" и "Педагогика", принятых Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Республики Армения (23.03.2007).

УДК 51
ББК 22.1
М 151 **Математика в высшей школе.**– Ереван: Изд-во НПУА "Чартарагет", 2016. - Том 12, №1.– 68с.

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Адрес редакции: 0009, Ереван, ул. Теряна 105, НПУА, корпус 12, комната 12202.

Телефон: +(37410) 56-28-82. **E-mail:** mathdep@seua.am; **Web:** www.math.seua.am

---

Included in the accepted by the Highest Certifying Commission of Armenia (HCC) list of periodicals admissible for publications of the results of PhD and Doctoral theses by specialties Mathematics and Pedagogy (23.03.2007).

UDC 51
LBC 22.1
M 151 **Mathematics in Higher School.** - Yerevan: NPUA "Tchartaraget" Publishing House.- 2016.- Volume 12, №1.- 68p.

EDITORIAL COUNCIL

Address: 0009, Yerevan, 105 Teryan, NPUA, bld. 12, room 12202.

Tel: +(37410) 56-28-82, **E-mail:** mathdep@seua.am; **Web:** www.math.seua.am

ISSN 1829-3344

УДК 514.112.6; 514.174.2

ФРАКТАЛЬНАЯ ПРИРОДА ГРУПП ШОТТКИ

А.Г. Аракелян
(Национальный политехнический университет Армении)
E-mail: armarakelyan@seua.am

Рассматриваются различные способы построения ковра Аполлония. Помимо геометрического построения ковра, исследованы различные клейновые группы, производящие одинаковые ковры Аполлония, и выявлены некоторые связи между ними. Однако вопрос определения более точного соотношения между ними, объясняющего это совпадение, остается открытым.
Ключевые слова: ковер Аполлония, декартова конфигурация окружностей, клейновые группы, преобразования Мебиуса, группы Шоттки.

1°. Группы Клейна. Пусть $\mathrm{M\ddot{o}b}(\tilde{\mathbb{C}})$ – группа всех дробно-линейных отображений

$$\gamma(z) = (az+b)/(cz+d),\ \ ad-bc=1,\ \ (a,b,c,d \in \mathbb{C})$$

расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, известная как преобразования Мебиуса. Эта группа называется *мебиусовой.* Преобразования Мебиуса могут быть представлены в виде 2×2 обратимых матриц, т.е. имеется естественный изоморфизм

$$\mathrm{M\ddot{o}b}(\tilde{\mathbb{C}}) \cong PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{\pm I\},$$

где I – единичная 2×2 матрица:

$$\varphi : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \gamma_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Напомним, что преобразование $\gamma \neq I$ называется: *эллиптическим,* если квадрат его следа $\mathrm{tr}^2\gamma = (a+d)^2$ удовлетворяет неравенству $0 \le \mathrm{tr}^2\gamma < 4$; *гиперболическим,* если $\mathrm{tr}^2\gamma > 4$; *параболическим,* если $\mathrm{tr}^2\gamma = 4$, и *локсодромическим,* если $\mathrm{tr}^2\gamma \in \mathbb{C}\setminus[0,4]$. Классификация этих преобразований может быть основана также, например, на свойствах их неподвижных точек, число которых равно единице для параболических преобразований и двум - в остальных случаях.

Будем рассматривать *дискретные* подгруппы $\Gamma \subset \mathrm{M\ddot{o}b}(\tilde{\mathbb{C}})$, т.е. такие, в которых единица является изолированным элементом.

Говорят, что группа Γ действует *разрывно* в точке $z \in \tilde{\mathbb{C}}$, если стабилизатор $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(z) = z\}$ точки z в Γ конечен и существует такая окрестность U_z точки z, что $\gamma(U_z) \cap U_z = \varnothing$ для всех $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_z$ и $\gamma(U_z) = U_z$ для всех $\gamma \in \Gamma_z$. Множество $\Omega(\Gamma)$ точек $z \in \tilde{\mathbb{C}}$, в которых Γ действует разрывно, называется *множеством разрывности* группы Γ. Это множество открыто. Его дополнение $\Lambda(\Gamma) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \Omega(\Gamma)$ называется *предельным множеством* группы Γ и представляет собой множество накопления *орбит* $\Gamma z_0 = \{\gamma(z_0) \mid \gamma \in \Gamma\}$ для всех точек $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$.

Группа Γ называется (*собственно*) *разрывной,* если $\Omega(\Gamma)$ не пусто. Тогда предельное множество $\Lambda(\Gamma)$ нигде не плотно в $\tilde{\mathbb{C}}$ и совпадает с замыканием множества неподвижных точек неэллиптических элементов Γ. Ясно, что разрывная группа дискретна; обратное, вообще говоря, не верно. Можно показать, что предельное множество разрывной группы либо пусто, либо состоит из одной или двух точек, либо бесконечно. Если $\operatorname{card}\Lambda(\Gamma) \le 2$, то группа Γ называется *элементарной.*

Разрывная группа, у которой $\Lambda(\Gamma)$ состоит более чем из двух точек, называется *клейновой.* Иногда элементарные группы также относятся к клейновым.

Назовем *группой Шоттки* клейновую группу Γ с образующими $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p, p \ge 1$, для которых существуют $2p$ непересекающиеся жордановы кривые $l_1, l_1', l_2, l_2', \dots, l_p, l_p'$, ограничивающие $2p$-связную область D такую, что $\gamma_i(D) \cap D = \varnothing$ и $\gamma_i(l_i) = l_i'$, $i = 1, 2, \dots, p$. Можно доказать, что группа Шоттки чисто локсодромическая, т.е. все ее элементы $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$ – локсодромические или гиперболические.

Группа, порождённая отображениями $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$, это множество всевозможных композиций отображений γ_j и обратных к ним.

Классическая группа Шоттки $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p \rangle$ - клейновая группа, связанная с не имеющими общих внутренних точек, но, возможно, касающихся на границах $2n$ кругов на плоскости $\tilde{\mathbb{C}}$. Порождающий элемент группы $\gamma_j, j = 1, \dots, p$ отображает интерьер окружности C_{2j-1} на экстерьер окружности C_{2j} и наоборот.

Одна из основных проблем теории клейновых групп – изучение структуры предельного множества $\Lambda(\Gamma)$ [1]. В настоящей работе дается построение примеров клейновых групп, предельные множества которых суть ковры Аполлония.

2°. Ковры Аполлония. Ковер Аполлония - одно из самых красивых фрактальных множеств [2], построение которого может быть описано простым способом - на основе древней задачи Аполлония Пергского (для заданных трех окружностей на плоскости можно построить ровно две окружности, касающиеся всех трех). Начиная с четырех попарно касающихся окружностей на плоскости (декартова конфигурация [3]) добавляем новые окружности, касающиеся всевозможных троек предыдущих окружностей, согласно задаче Аполлония. Продолжая этот процесс до бесконечности, приходим к упаковке бесконечно многих окружностей, называемой *ковром Аполлония* (рис. 1).

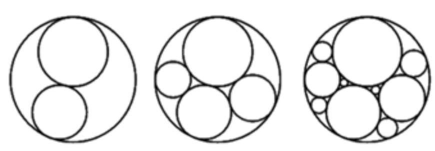

Рис. 1. Построение ковра Аполлония

Ясно, что в зависимости от исходной конфигурации кругов ковер Аполлония может принимать четыре различные формы (рис. 2).

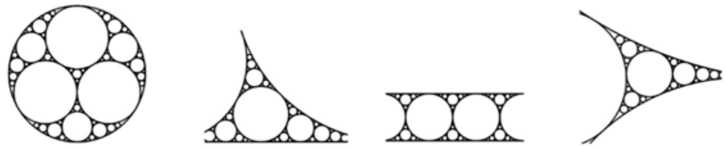

Рис. 2. Ковры Аполлония

Далее рассмотрим действие групп дробно-линейных преобразований Мёбиуса в связи с коврами Аполлония. Целью работы является использование параметров дробно-линейного отображения для построения ковра Аполлония и исследования его свойств. Следует отметить, что мы переводим геометрическую задачу в задачу с параметрами, которую можно решить алгебраически, при этом используются такие подгруппы мёбиусовых преобразований, которые дискретны, т.е. образы близких окружностей могут оказаться на сфере, удаленной на значительные, но конечные расстояния, что позволяет заполнять получающиеся криволинейные треугольники окружностями все меньших радиусов. Как известно, преобразование Мёбиуса обладает свойством сохранения углов и окружностей, в частности, оно переводит касающиеся окружности в касающиеся окружности (здесь и далее линии на $\mathbb{C}$ будем понимать как окружности бесконечного радиуса на $\tilde{\mathbb{C}}$). Хотя, на первый взгляд, различные выборы начальных кругов приводят к разным и не похожим друг на друга коврам, тем не менее все получаемые картины в определенном смысле эквивалентны. Более того, любой ковер Аполлония преобразованием Мебиуса может быть отображен на любом другом ковре.

3°. АПОЛЛОНИЕВА ГРУППА. Ковер Аполлония $\mathcal{A}$, порожденный конфигурацией Декарта $\mathcal{D}$, можно описать с помощью определенной группы преобразований Мёбиуса следующим образом.

Пусть $\mathcal{D}_0 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ - начальная декартова конфигурация ковра Аполлония. Рассмотрим группу мёбиусовых преобразований

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_0) = \langle \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_4 \rangle \subset \text{Möb}(\tilde{\mathbb{C}}),$$

действующих на $\tilde{\mathbb{C}}$, где $\mathfrak{s}_i$ - инверсия относительно окружности $C_i^{\perp}$ - проходящей через точки касания окружностей $C_j, j \neq i$. Инверсия $\mathfrak{s}_i$ фиксирует три начальные окружности $C_j \in \mathcal{D}_0, j \neq i$ и переводит окружность C_i в новую окружность $C_i' := \mathfrak{s}_i(C_i)$, касающуюся трех окружностей $C_j, j \neq i$. Заметим, что окружности $C_i^{\perp}, i = \overline{1,4}$ образуют двойственную конфигурацию Декарта $\mathcal{D}_0'$ (см. рис. 3).

Если вместо исходной декартовой конфигурации $\mathcal{D}_0$ рассмотреть другую конфигурацию $\mathcal{D}$, то получим другую группу инверсий $\mathcal{S}(\mathcal{D})$. Тем не менее эти две группы всегда можно сопрягать с помощью преобразований Мёбиуса. Именно поэтому достаточно исследовать только случай $\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)$.

Поскольку круги ковра Аполлония лежат на расширенной плоскости $\tilde{\mathbb{C}}$, которую можно рассматривать как границу $\delta_\infty(\mathbb{H}^3)$ гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$, то группа $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ дискретна и действует разрывно на $\mathbb{H}^3$. Следовательно, $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ есть *группа Клейна*. Заметим, что группа $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ действует инвариатно относительно ковра $\mathcal{A}$, имеет четыре $\mathcal{S}$-орбиты $\mathcal{S}(C_i)$ и удовлетворяет условию $\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^4 \mathcal{S}(C_i)$. Поэтому группу $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}) \triangleq \mathcal{S}(\mathcal{D})$ назовем *геометрической группой Аполлония.*

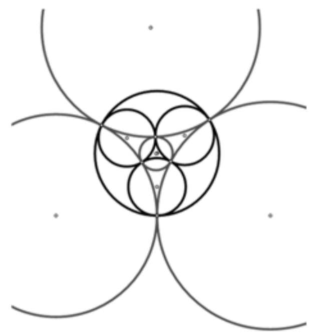

Рис. 3. Двойственная конфигурация Декарта

Пусть $\mathcal{A}$ - ковер Аполлония. Тогда *остаточное множество* $\mathcal{A}$ определяется соотношением

$$\operatorname{Res}(\mathcal{A}) = \overline{\bigcup_{C \in \mathcal{A}} C} .$$

Равносильно, если взять дополнение в $\tilde{\mathbb{C}}$ внутренностей всех окружностей ковра $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 1. Для группы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ и ковра Аполлония $\mathcal{A}$ имеет место следующее соотношение:

$$\operatorname{Res}(\mathcal{A}) = \Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})),$$

где $\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$ - предельное множество группы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$ есть множество точек накопления орбиты $\mathcal{S}(z)$ произвольной точки $z \in \mathbb{H}^3$, а $\operatorname{Res}(\mathcal{A})$ - замыкание всех точек касания окружностей ковра $\mathcal{A}$, то $\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})) \subset \operatorname{Res}(\mathcal{A})$.

Далее, пусть $z \in \operatorname{Res}(\mathcal{A})$, а $N -$ произвольное открытое множество содержащее z. Тогда ясно, что N содержит бесконечное число окружностей из $\mathcal{A}$, но поскольку $\mathcal{A}$ порождается орбитами $\mathcal{S}(C_i), i = \overline{1,4},$ то существуют индекс i и бесконечная последовательность $\mathfrak{S}_k$ элементов $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ такие, что $\mathfrak{S}(C_i) \subset N$ для всех k. Следовательно, $z \in \Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$, т.е. $\operatorname{Res}(\mathcal{A}) \subset \Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$.

Вернемся снова к декартовой конфигурации $\mathcal{D}_0 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ (рис. 3). Если предположить, что C_1 - единичная окружность, то можно легко найти аналитические выражения для инверсии $\mathfrak{s}_i$. Учитывая, что инверсия относительно окружности с радиусом r с центром в точке w задается соотношением

$$\mathfrak{i}(z) = \frac{w\overline{z} + r^2 - w\overline{w}}{z - \overline{w}},$$

то после несложных вычислений для генераторов группы Аполлония получим

$$\mathfrak{s}_1(z) = \frac{\overline{z}}{-4iz+1},\ \ \mathfrak{s}_2(z) = \overline{z},\ \ \mathfrak{s}_3(z) = \frac{(1+i)\overline{z}-1}{\overline{z}-1+i},\ \ \mathfrak{s}_4(z) = \frac{(-1+i)\overline{z}-1}{\overline{z}+1+i}.$$

Заметим, что инверсии $\mathfrak{s}_k$, $k = 1,2,3,4$ являются конформными, но меняющими ориентацию отображениями. Тем не менее их можно переписать в виде композиций, сохраняющих ориентацию отображений (т.е. элементов из $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$), и в виде отображения комплексного сопряжения $\mathfrak{j} : z \to \overline{z}$. Таким образом, $\mathfrak{s}_k = \alpha_k \circ \mathfrak{j}$, где α_k представляются следующими матрицами:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4i & 1 \end{pmatrix},\quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix},\quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1+i & -1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Если учесть, что *общая группа Мёбиуса* $\mathrm{GM\ddot{o}b}(\tilde{\mathbb{C}})$ получается расширением группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ путем добавления к ней преобразования $\mathfrak{j} : z \to \overline{z}$, т.е. $\mathrm{GM\ddot{o}b}(\tilde{\mathbb{C}}) = < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}), \mathfrak{j} >$, то подгруппу $\mathcal{S}^h_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ сохраняющих ориентацию голоморфных элементов группы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ можно представить в виде

$$\mathcal{S}^h_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}) \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Учитывая, что $\alpha_2 = I$ и $\overline{\alpha}_k = \alpha_k^{-1}$, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^h_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}) &= < \alpha_1\overline{\alpha}_2, \alpha_1\overline{\alpha}_3, \alpha_1\overline{\alpha}_4, \alpha_2\overline{\alpha}_1, \alpha_2\overline{\alpha}_3, \alpha_2\overline{\alpha}_4, \alpha_3\overline{\alpha}_1, \alpha_3\overline{\alpha}_2, \alpha_3\overline{\alpha}_4, \alpha_4\overline{\alpha}_1, \alpha_4\overline{\alpha}_2, \alpha_4\overline{\alpha}_3 >= \\ &= < \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 >.\end{aligned}$$

4°. Группы Шоттки. Рассмотрим теперь группы Шоттки и покажем, что остаточное множество ковров Аполлония можно рассматривать как предельное множество этих групп.

Рассмотрим начальную декартову конфигурацию ковра Аполлония $\mathcal{D}_0 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ вместе с двойственной конфигурацией $\mathcal{D}'_0$. Как и в предыдущем разделе, предположим, что C_1 - единичная окружность, и покажем, что существует группа Шоттки, порождающие элементы которой соединяют в пары круги двойственной декартовой конфигурации, а предельное множество совпадает с остаточным множеством ковра $\mathcal{A}$.

В частности, допустим, что $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ - порождающие элементы группы $\mathcal{G}_0$ такие, что $\mathfrak{g}_1$ отображает окружность $C_1^{\perp}$ на окружность $C_2^{\perp}$, а интерьер окружности $C_1^{\perp}$ - на экстерьер окружности $C_2^{\perp}$. Аналогично, $\mathfrak{g}_2$ отображает окружность $C_3^{\perp}$ на окружность $C_4^{\perp}$, а интерьер окружности $C_3^{\perp}$ - на экстерьер окружности $C_4^{\perp}$. Для того чтобы предельное множество группы Шоттки с касающимися начальными кругами Шоттки образовало кривую, необходимо наложить следующие условия на точки касания:

$$\mathfrak{g}_1(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i)=1,\ \mathfrak{g}_1(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i)=-1,\ \mathfrak{g}_2(-1)=1,\ \mathfrak{g}_2(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i)=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i.$$

Для наглядного понимания этих требований достаточно взглянуть на рис. 4, где изображены исходные круги Шоттки и ковер Аполлония, а на рис. 5 продемонстрировано, как круги Шоттки скапливаются, аппроксимируя предельное множество.

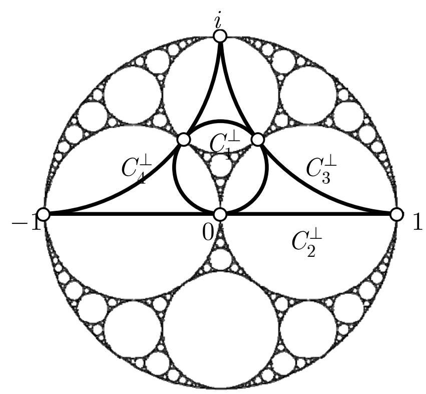

Рис. 4. Точки касания исходных кругов Шоттки и ковер Аполлония

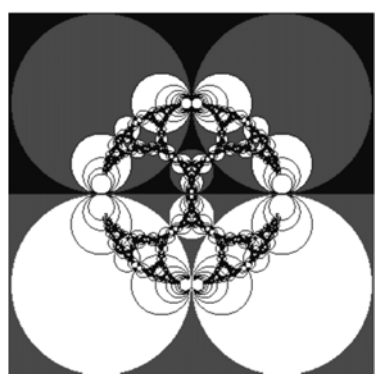

Рис. 5. Скопление орбит кругов Шоттки

Теперь, так как преобразования Мебиуса действуют трижды транзитивно на плоскости $\tilde{\mathbb{C}}$, то после несложных вычислений получим

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}_2 = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\operatorname{trace}(\mathfrak{g}_1) = \operatorname{trace}(\mathfrak{g}_2) = 2$, т.е. $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ - параболические преобразования, значит они имеют ровно одну неподвижную точку на $\tilde{\mathbb{C}}$. Более того, коммутатор

$$\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_1^{-1}\mathfrak{g}_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1-2i & 2i \\ -2i & -1+2i \end{pmatrix}$$

тоже параболический. Следовательно, группа Шоттки, производящая ковер Аполлония, отличается наличием двух параболических образующих и одного параболического коммутатора. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Предельное множество $\Lambda(\mathcal{G}_0)$. Группа Шоттки $\mathcal{G}_0 = \langle \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \rangle$ с двумя параболическими образующими

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}_2 = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$$

совпадает с остаточным множеством ковра $\mathcal{A}$ с начальной декартовой конфигурацией $\mathcal{D}_0$.

Как и в случае аполлониевой группы, если вместо исходной декартовой конфигурации $\mathcal{D}_0$ рассмотреть другую конфигурацию $\mathcal{D}$, то получим другую группу Шоттки $\mathcal{G}$. Тем не менее всегда можно найти преобразование Мёбиуса β такое, что $\beta\mathcal{G}\beta^{-1} = \mathcal{G}_0$ и $\beta(\mathcal{D}_0) = \mathcal{D}$. Именно поэтому достаточно исследовать только случай $\mathcal{G}_0$. Тем самым получаем следующее более общее утверждение.

Теорема 2. Для заданного ковра Аполлония $\mathcal{A}$ существует классическая группа Шоттки второго рода $\mathcal{G}$ с параболическими образующими и параболическим коммутатором такая, что $\operatorname{Res}(\mathcal{A}) = \Lambda(\mathcal{G})$.

Доказательство. Используя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, получим утверждение теоремы.

Есть очевидные отношения между группой Шоттки $\mathcal{G}_0$ и группой $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^h(\mathcal{D})$ голоморфных элементов $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$. Действительно, группа $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^h(\mathcal{D})$ порождается тремя параболическими элементами $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$, которые связаны с параболическими элементами $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_1^{-1}\mathfrak{g}_2^{-1}$ группы $\mathcal{G}_0$ следующими соотношениями:

$$\alpha_1 = \mathfrak{g}_1^{-2}, \quad \alpha_4\alpha_3^{-1} = \mathfrak{g}_2^{-2}, \quad \alpha_3^2 = \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_1^{-1}\mathfrak{g}_2^{-1}.$$

Однако эти группы не совсем одинаковы. Необходимо определить более точное соотношение между ними, объясняющее, как они приводят к одному и тому же ковру Аполлония.

В заключение приведем несколько примеров предельных множеств групп Шоттки (рис.6), в которых левые круги соответствуют порождающим исходным кругам Шоттки.

Многие из этих предельных множеств имеют самоподобные структуры, которые напоминают фракталы.

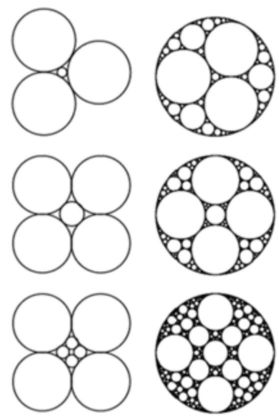

Рис. 5. Предельные множества групп Шоттки

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушкаль С.Л., Апанасов В.Н., Гусевский Н.А. *Клейновые группы и униформизация в примерах и задачах*.- М.: Наука, 1981.
2. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*.- New York: W.H. Freeman, 1983.
3. Lagarias J.C., Mallows C.L., Wilks A.R. *Beyond the Descartes Circle Theorem* // American Mathematical Monthly.- 2002.-109(4).- P. 338-361.

Материал поступил в редакцию 09.02.2016.

ՇՈՏՏԿԻԻ ԽՄԲԵՐԻ ՖՐԱԿՏԱԼԱՅԻՆ ԲՆՈՒՅԹԸ

Ա.Հ. Առաքելյան

Դիտարկվում են ապոլլոնյան գորգերի կառուցման տարբեր մեթոդներ: Ի լրումն գորգի երկրաչափական կառուցման, ուսումնասիրվում են տարբեր կլեյնյան խմբեր, որոնք ծնում են միանման ապոլլոնյան գորգեր, և բացահայտվում են դրանց միջև առկա որոշ կապեր:

Առանցքայի բառեր. ապոլլոնյան գորգեր, շրջանագծերի դեկարտյան կոնֆիգուրացիաներ, կլեյնյան խմբեր, Մյոբիուսի ձևափոխություններ, Շոտտկիի խմբեր:

THE FRACTAL NATURE OF SCHOTTKY GROUPS

A.H. Arakelyan

The different ways for the construction of Apollonian gasket was introduced. Apart from the geometric construction, two difeerent but closely related Kleinian groups that produce the same gasket were examined and some of their connections were revealed. However, there is still left to discover an explicit relation between them in order to explain this coincidence.

Keywords: Apollonian gasket, Descartes configuration, Kleinian group, Schottky groups.

УДК 517. 948

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОДКЛАССАМИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

И.В. Оганисян
(Национальный политехнический университет Армении)
E-mail: ishkhanh@gmail.com

Рассмотрены некоторые соотношения между подклассами функций ограниченного вида N_α М.М. Джрбашяна и T_β Л. Карлесона, а также одно граничное свойство функций класса $N_\alpha\left(-1<\alpha<-1/2\right)$.

Ключевые слова: классы Карлесона и Джрбашяна, коэффициенты Тейлора, произведения Бляшке и М.М. Джрбашяна, емкость множества.

Классы мероморфных в единичном круге функций $N_\alpha\left(-1<\alpha<\infty\right)$ М.М. Джрбашяна совпадают с множеством функций $F(z)$, которые допускают представление вида [1,2]

$$F(z)=c\cdot z^\lambda\,\frac{B_\alpha(z;a_\mu)}{B_\alpha(z;b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\Psi\left(\theta\right)\right\},\tag{1}$$

где c - постоянная; λ - целое число; функция $S_\alpha\left(z\right)$ имеет вид

$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\},$$

а $\Psi\left(\theta\right)$ - произвольная вещественная функция ограниченной вариации на сегменте $\left[0,2\pi\right]$.

Функции $B_\alpha(z;a_\mu)$ и $B_\alpha(z;b_\nu)$ - сходящиеся в круге $|\,z_k\,|<1$ бесконечные произведения с нулями $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ соответственно, которые при $\alpha=0$ совпадают с произведением Бляшке:

$$B\left(z;z_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\overline{z}_k z}\cdot\frac{|\,z_k\,|}{z_k}.\tag{2}$$

Множество нулей произведения Бляшке должно удовлетворять условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-|\,z_k\,|\right)<\infty.$$

Классы $N_\alpha\left(-1<\alpha<\infty\right)$ с убыванием α монотонно сужаются, в частности,

$$N_\alpha\subset N_0\,,-1<\alpha<0,$$
$$N_0\subset N_\alpha,0<\alpha<\infty,$$

где $N_0 \equiv N$ - класс функций ограниченного вида Р. Неванлинны.

Для функций класса $N_\alpha\left(-1<\alpha\leq 0\right)$ известно представление [2].

Теорема А. Пусть $F\left(z\right)\subset N_\alpha\left(-1<\alpha\leq 0\right)$. Тогда существуют ограниченные аналитические функции

$$f_i\left(z\right)=\sum a_n^{(i)}z^n\in N_\alpha,\quad i=1,2,\ldots$$

такие, что

$$F\left(z\right)=\frac{f_1\left(z\right)}{f_2\left(z\right)}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}z^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}z^n}, \tag{3}$$

причем

$$\left|a_n^{(i)}\right|=\mathrm{O}\left(n^\alpha\right),\quad n\to\infty;\ i=1,2,\ldots\ .$$

Обозначим через $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ множество тех функций из N_α, которые допускают представление вида

$$f\left(z\right)=Cz^\lambda B_\alpha\left(z;z_k\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\psi\left(\theta\right)\right\},$$

где $\psi\left(\theta\right)$ - невозрастающая функция.

Классы $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\leq 0\right)$ являются некоторыми подклассами ограниченных аналитических функций классов N_α. Для тейлоровских коэффициентов этих функций (в том числе и для произведений B_α) известна оценка [2]: если функция $f\left(z\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ \left|z\right|<1$ принадлежит классу $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\leq 0\right)$, то имеет место оценка

$$\left|a_n\right|=O\left(n^\alpha\right),\ n\to\infty\,. \tag{4}$$

Следующая теорема характеризует граничное свойство функций класса $N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ [3].

Теорема B. Если функция $F\left(z\right)\in N_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$, то существует предел

$$F\left(e^{i\theta}\right)=\lim_{r\to 1-0}F\left(re^{i\theta}\right)$$

для любого $\theta\in\left[0,2\pi\right]$, кроме, быть может, некоторого множества $E\subset\left[0,2\pi\right]$, емкость $\gamma=1+\alpha$ которого равна нулю.

Напомним, что множество E, измеримое B, имеет положительную емкость γ (по Фростмону), $0<\gamma<1$, если найдется такая мера $\mu\prec E$ (будем говорить, что мера μ сосредоточена на множестве E, и писать $\mu\prec E$, если $\mu\left(E\right)=1$, т.е. если $\int\limits_E d\mu=1$), для которой функция

$$V_{\gamma}\left(x,r\right)=\int_{0}^{2\pi}\frac{d\mu}{\left|e^{it}-re^{ix}\right|^{\gamma}}$$

остается равномерно ограниченной по x при $r\to 1-0$, т.е. при некотором $\mu\prec E$:

$$V_{\gamma}\left(\mu\right)=\underset{0<r<1}{Sup}\left\{\max_{0\le x\le 2\pi}V_{\gamma}\left(x,r\right)\right\}<+\infty .$$

Если же для любой меры $\mu\prec E$ будет $V_{\gamma}\left(\mu\right)=+\infty$, то E имеет емкость γ, равную нулю, и будем писать

$$Cap_{\gamma}E=0 .$$

В работе [4] доказывается неулучшаемость теоремы B.

Приведем некоторые элементарные свойства емкости, которые нам понадобятся в дальнейшем:

1. Если для некоторого $\gamma\in\left(0,1\right)$ и множества E имеем $Cap_{\gamma}E=0$, то для любого $\gamma',\ \gamma\le\gamma'<1$ имеем также $Cap_{\gamma'}E=0$.

2. Если $Cap_{\gamma}E_{k}=0$, $k=1,2,\ldots,p$, то

$$Cap_{\gamma}\left\{\bigcup_{1}^{p}E_{k}\right\}=Cap_{\gamma}\left\{\bigcap_{1}^{p}E_{k}\right\}=0 .$$

Отметим, что теорема B доказывается непосредственным применением параметрического представления (1), но аналогичное граничное свойство можно получить также и из представления теоремы A, однако оно получается более слабым, чем теорема B.

Это объясняется тем, что представление (1) является необходимым и достаточным условием принадлежности функций классу N_{α}, т.е. оно полностью характеризует класс N_{α}. А представление (3) является только необходимым условием для того, чтобы функция принадлежала классу $N_{\alpha}\left(-1<\alpha<0\right)$ [5].

Отметим, что еще раньше, до введения классов N_{α}, Карлесоном [6] были рассмотрены другие классы мероморфных функций, входящие в класс N. Эти классы существенно отличны от классов $N_{\alpha}\left(-1<\alpha<0\right)$ и определяются следующим образом.

Для данного значения $\beta\ \left(0<\beta<1\right)$ в класс T_{β} входят мероморфные в круге $\left|z\right|<1$ функции $\omega\left(z\right)$, для которых

$$T_{\beta}\left(\omega\right)\equiv\int_{0}^{1}\left(1-r\right)^{-\beta}A\left(r,\omega\right)dr<+\infty ,$$

где $A\left(r,\omega\right)=\iint\limits_{\left|z\right|<r}\frac{|\,\omega'(z)\,|^{2}}{(1+|\,\omega(z)\,|^{2})^{2}}dxdy$ - известная функция Альфорса-Симидзу.

В своем исследовании Карлесон установил, что для каждой функции $F(z) \in T_\beta$ утверждение теоремы В справедливо, притом для значения $\gamma = 1 - \beta$.

Для классов T_β имеется также аналогичный теореме А результат [6]:

Теорема С. Если $\omega\left(z\right) \in T_\gamma\left(0 < \gamma < 1\right)$, то существуют две ограниченные, аналитические функции

$$\varphi\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

такие, что $\omega(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|a_n\right|^2 \frac{n^\gamma}{\left(\log n\right)^{1+\delta}} < \infty, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left|b_n\right|^2 \frac{n^\gamma}{\left(\log n\right)^{1+\delta}} < \infty$$

для любого $\delta > 0$. В частности, φ и ψ принадлежат любому классу $T_\beta\left(\beta < \gamma\right)$.

С убыванием β классы T_β монотонно расширяются и при значении $\beta = 0$ совпадают с классом N. Поэтому

$$T_0 = N_0 = N .$$

Основные результаты, полученные для классов $N_\alpha\left(-1 < \alpha \le 0\right)$ по своим формулировкам оказались близкими (в некотором смысле и более точными) к формулировкам соответствующих теорем для классов T_γ Л. Карлесона, хотя нет данных о сравнимости классов $N_\alpha\left(-1 < \alpha < 0\right)$ с классами $T_\gamma\left(0 < \gamma < 1\right)$. Но отметим, что эти результаты для классов $N_\alpha\left(-1 < \alpha \le 0\right)$ были доказаны непосредственно из их факторизационных представлений, а для классов T_γ они были выявлены Карлесоном довольно окольными путями, так как не была выяснена их аналитическая структура и не были известны факторизационные представления, характеризующие эти классы.

Для классов T_γ Карлесоном [6] доказана следующая теорема.

Теорема Д. Ограниченная, аналитическая функция

$$\omega\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \left|z\right| < 1$$

принадлежит классу $T_\gamma\left(0 < \gamma < 1\right)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|^2 n^\gamma < \infty .$$

Будем использовать также [7].

Теорема (Салема-Зигмунда). Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) k^\beta < \infty \left(0 < \beta < 1\right),$$

то тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\right)$$

может расходиться только на множестве $\left(1-\beta\right)$, емкость которого равна нулю.

Основные результаты. Теперь, используя теорему Д и оценку (4), а также одно свойство $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\le 0\right)$, легко доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\omega\left(z\right)$ принадлежит классу $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<-\dfrac{1}{2}\right)$, то она принадлежит также любому классу $T_\gamma\left(0\le\gamma<-2\alpha-1\right)$.

Теорема 2. Любую функцию класса $N_\alpha\left(-1<\alpha<-\dfrac{1}{2}\right)$ можно представить как частное двух ограниченных, аналитических функций классов T_γ, где γ - любое число из интервала $\left[0,-2\alpha-1\right)$.

Докажем также следующую теорему.

Теорема 3. Если $F\left(z\right)\in N_\alpha\left(-1<\alpha<-\dfrac{1}{2}\right)$, тогда радиальный предел

$$F\left(e^{i\theta}\right)=\lim_{r\to 1-0}F\left(re^{i\theta}\right)$$

существует всюду на $\left[0,2\pi\right]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества E, емкость γ которого равна нулю, где γ - любое число из интервала $\left(2\left(1+\alpha\right),1\right)$.

Доказательство. Имея в виду теорему А и соответствующее свойство емкости, достаточно показать утверждение для функций $f_i\left(z\right),\ i=1,2$.

Так как

$$\left|a_n^{(i)}\right|\le c^{(i)}n^{\alpha},\ i=1,2,$$

поэтому

$$\left|a_n^{(i)}\right|^2 n^{1-\gamma}\le\left(c^{(i)}\right)^2 n^{2\alpha-\gamma+1}.$$

Из условий $2\left(1+\alpha\right)<\gamma<1$ получим $2\alpha-\gamma+1<-1$, и поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n^{(ii)}\right|^2 n^{1-\gamma}$ сходится.

Для завершения доказательства достаточно применить теорему Салема-Зигмунда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*.- М.: Наука, 1966.- 672 с. (гл. IX).
2. Джрбашян М.М., Захарян В.С. *Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге*.- М.: Наука, 1993.- 224 с.
3. Джрбашян М. М., Захаарян В. С. *Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида* // Изв. АН СССР. Сер. Мат.- 1970.- Т. 34.- С. 1262-1339.
4. Джрбашян М.М., Мадоян С.В. *О граничных значениях функций класса* $N_{\alpha}\left(-1<\alpha<0\right)$ *М.М. Джрбашяна* // ДАН АрмССР.- 1984.- Т. IXXIX, N1.- С. 7-9.
5. Оганисян И.В. *Об одном представлении классов* $N_{\alpha}\left(-1<\alpha<0\right)$ // Доклады НАН Армении.- 2013.- Т. 113, N. 4.- С. 337-342.
6. Carleson L. *On a classes of meromorphic functions and its associated expectional sets*.- Uppsala, 1950.
7. Бари Н. *Тригонометрические ряды*.- М., 1961.

Материал поступил в редакцию 11.02.2016.

ՈՐՈՇ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԵՍՔԻ ՄԵՐՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵՆԹԱԴԱՍԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Ի. Վ. Հովհաննիսյան

Դիտարկվում են որոշ առնչություններ սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների Մ. Մ. Ջրբաշյանի N_{α} և Կառլեսոնի T_{β} ենթադասերի միջև: Դիտարկվում է նաև $N_{\alpha}\left(-1<\alpha<-1/2\right)$ դասի ֆունկցիաների մի եզրային հատկություն:

Առանցքային բառեր. Կառլեսոնի և Ջրբաշյանի դասեր, Թեյլորի գործակիցներ, Բլյաշկեի և Ջրբաշյանի արտադրյալներ, բազմության ունակություն:

SOME CONNECTIONS BETWEEN SUBCLASSES OF MEROMORF FUNCTIONS BOUNDED TYPES

I.V. Hovhannisyan

In this paper we consider some connections between classes N_{α} M. M. Djrbashyan and L. Carleson T_{β}- subclasses of class functions bounded type. A boundary property of class $N_{\alpha}\left(-1<\alpha<-1/2\right)$ is considered too.

Keywords: classes of Carleson and Djrbashyan, Taylor coefficients, Blashke and Djrbashyan products, capacity of a set.

УДК 517. 948

ГЕОМЕТРИЯ ОДНОГО КЛАССА НОРМАЛЬНО ПЛОСКИХ РИЧЧИ-ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.А. Мирзоян, А.Р. Назарян

(Национальный политехнический университет Армении**)**

E-mail: vmirzoyan@mail.ru; aram.nazaryan@gmail.com

Даётся геометрическое описание одного класса нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два с нулевым индексом сингулярности и индексом регулярности два в евклидовых пространствах. Подробно исследуется класс эйнштейновых подмногообразий, которые представляют собой каналовые подмногообразия.

Ключевые слова: риччи-полусимметрические подмногообразия, конусы, эйнштейновы подмногообразия.

1°. Введение. Пусть M – риманово многообразие с тензором Риччи R_1 и операторами кривизны $R\left(X,Y\right)$, где X,Y – произвольные векторные поля на M. Если $R\left(X,Y\right)R_1 = 0$ для любых X,Y, то тензор R_1 называется полупараллельным, а само многообразие M называется риччи-полупараллельным или риччи-полусимметрическим. Риччи-полусимметрические многообразия являются естественными обобщениями симметрических, эйнштейновых, полусимметрических многообразий и римановых многообразий с параллельным тензором Риччи (см. [1-3] и цитированную в них литературу). Общая классификация римановых риччи-полусимметрических многообразий была получена в [2]. В теории риччи-полусимметрических многообразий и их изометрических погружений одной из актуальных задач является задача их геометрического описания. Различные классы риччи-полусимметрических подмногообразий были исследованы в [3-11].

Настоящая работа посвящена исследованию и геометрическому описанию одного класса нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два с нулевым индексом сингулярности и индексом регулярности два. (За стандартными сведениями отсылаем к монографии [1] и к работам [4,5,8,12]).

2°. Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условиям $i_R = 2,\ \mu = \nu$ **.** Пусть m-мерное нормально плоское риччи–полусимметрическое подмногообразие M евклидова пространства E_{m+2} удовлетворяет указанным условиям. Первое условие означает, что группа $W^{(1)}$ (см. [8,9]) регулярных главных векторов кривизны (г.в.к.) содержит два линейно независимых вектора, а остальные векторы являются их линейными комбинациями. Второе условие означает, что пространства дефектности $T_x^{(0)}$ и относительной дефектности T_x' (см. [8,9]) совпадают. Следовательно, подмногообразие M допускает только нулевой сингулярный г.в.к. Если T_x' является нулевым пространством, то $M -$ эйнштейново подмногообразие. При $\dim T_x' \geq 1$ подмногообразие M является полуэйнштейновым.

Здесь мы рассмотрим случай, когда подмногообразие M имеет только два различных линейно независимых г.в.к. n_1, n_2 с кратностями p_1, p_2 соответственно. В этом случае $\rho = \left|n_1\right|^2 - \langle H, n_1\rangle = \left|n_2\right|^2 - \langle H, n_2\rangle$, где $\rho -$ единственное ненулевое собственное значение тензора Риччи, а $H = p_1 n_1 + p_2 n_2 -$ вектор средней кривизны. Если $H = 0$, то векторы n_1, n_2 будут линейно зависимы, что противоречит условию. Следовательно, в рассматриваемом случае подмногообразие не может быть минимальным. Подставляя значение H в приведённое выше равенство, получим

$$(p_1 - 1)\left|n_1\right|^2 - (p_1 - p_2)\langle n_1, n_2\rangle - (p_2 - 1)\left|n_2\right|^2 = 0 .$$

Отсюда следует, что необходимо рассмотреть всего три случая:

1) $p_1 = p_2 = 1;$

2) $\left|n_1\right|^2 = \langle n_1, n_2\rangle \left|n_1\right|^2 = \langle n_1, n_2\rangle;$

3) $p_1 \geq 2,\ p_2 \geq 2$.

Поскольку третий случай был исследован в работе В.А. Мирзояна и Г.С. Мачкаляна [9], то здесь мы рассмотрим первые два случая.

В первом случае кодефектность подмногообразия M равна двум. Как известно, всякое подмногообразие кодефектности два является полуэйнштейновым. Примером рассматриваемого класса подмногообразий кодефектности два является прямое произведение двух одинаковых окружностей и плоскости, т.е. произведение вида $S^1(r_1) \times S^1(r_1) \times L_m$ в евклидовом пространстве E_{4+m}.

Рассмотрим второй случай. Пусть $p_1 \geq 2$, $p_2 = 1$, $\left|n_1\right|^2 = < n_1, n_2 >$. Из последнего равенства следует, что $\left|n_1\right| = \left|n_2\right| \cos\varphi$. Следовательно, векторы n_1 и n_2 образуют острый угол. Кроме того, легко видеть, что условие $\left|n_1\right|^2 = < n_1, n_2 >$ равносильно $< n_1, n_1 - n_2 >= 0$, т.е. $n_1 \perp n_1 - n_2$ в каждой точке на подмногообразии M. Поскольку $\dim T_x^{(n_1)} = p_1 = p$, $\dim T_x^{(n_2)} = 1$, $\dim T_x^{(0)} = \mu$, то ортонормированный репер $\left\{x, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2}\right\}$ можем выбрать так, что $e_a \in T_x^{(n_1)},\ e_{p+1} \in T_x^{(n_2)},\ e_r \in T_x^{(0)}$, $e_\alpha \in T_x^{\perp}\left(M\right)$. Индексам в дальнейшем будем придавать следующие значения:

$$i,j,k=1,\ldots,m,\quad a,b,c=1,\ldots,p,\quad r,s,t=p+2,\ldots,m,\quad \alpha,\beta=m+1,\ m+2\,.$$

При таком выборе репера $\lambda_a^\alpha=\lambda_b^\alpha$, $a\neq b,\ \lambda_r^\alpha=0,\ \omega_r^\alpha=0$. Поскольку $n_1\perp n_1-n_2$, то единичные векторы $e_{m+1},\,e_{m+2}$ можем выбрать так, чтобы e_{m+1} был коллинеарен вектору n_1, а e_{m+2} – вектору n_1-n_2. Тогда $n_1=\lambda_a^{m+1}e_{m+1},\ \lambda_a^{m+1}\neq 0$. Следовательно, $\lambda_a^{m+2}=0$ и, как следствие, $\omega_a^{m+2}=0$. Далее, если $n_2=\lambda_{p+1}^{m+1}e_{m+1}+\lambda_{p+1}^{m+2}e_{m+2}$, то

$$n_1-n_2=\left(\lambda_a^{m+1}-\lambda_{p+1}^{m+1}\right)e_{m+1}-\lambda_{p+1}^{m+2}e_{m+2}\,.$$

Поскольку $n_1-n_2\parallel e_{m+2}$, то $\lambda_{p+1}^{m+1}=\lambda_a^{m+1}$. Таким образом,

$$n_1=\lambda_a^{m+1}e_{m+1},\quad n_2=\lambda_a^{m+1}e_{m+1}+\lambda_{p+1}^{m+2}e_{m+2}\,,$$

$$H=\left(p+1\right)\lambda_a^{m+1}e_{m+1}+\lambda_{p+1}^{m+2}e_{m+2}\,,\ \lambda_{p+1}^{m+2}\neq 0\,.$$

В выбранном репере матрицы $\left\|h_{ij}^\alpha\right\|$ второй фундаментальной формы подмногообразия M имеют следующий вид:

$$\left\|h_{ij}^{m+1}\right\|=\begin{Vmatrix}\lambda_a^{m+1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_a^{m+1} & & & \\ & & & \lambda_{p+1}^{m+1} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{Vmatrix},\ \left\|h_{ij}^{m+2}\right\|=\begin{Vmatrix}0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \lambda_{p+1}^{m+2} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{Vmatrix}.$$

Верно и обратное. Если в некотором ортонормированном репере, адаптированном к подмногообразию M в E_{m+2}, матрицы второй фундаментальной формы приводятся к указанному выше виду с такими же условиями на диагональные элементы, как и выше, то нормальная связность будет плоской, подмногообразие M будет иметь два главных вектора кривизны $n_1,\,n_2$ кратностей p и 1 и будет выполняться условие $\left|n_1\right|^2=<n_1,n_2>$. Непосредственно можно проверить, что тензор Риччи будет иметь только одно ненулевое собственное значение $-p\left(\lambda_a^{m+1}\right)^2$.

Перейдем к исследованию подмногообразия M. Если $\left\{\omega^1,\cdots,\omega^m,\omega^{m+1},\omega^{m+2}\right\}$ – двойственный репер к выбранному выше ортонормальному адаптированному реперу, то на подмногообразии M имеем

$$\omega^\alpha=0,\ \omega_i^\alpha=\lambda_i^\alpha\omega^i\,, \tag{1}$$

$$d\lambda_i^\alpha\delta_{ij}+\lambda_i^\beta\delta_{ij}\omega_\beta^\alpha+\left(\lambda_j^\alpha-\lambda_i^\alpha\right)\omega_j^i=h_{ijk}^\alpha\omega^k\,. \tag{2}$$

В этих формулах по индексу i нет суммирования. (В дальнейшем будем придерживаться следующего соглашения: если некоторый индекс содержится в левой и правой частях формулы, то по этому индексу суммирование не производится). Для того чтобы из формулы (2) получить ряд условий, необходимых в дальнейшем, индексам будем придавать различные значения.

Если в (2) $i=a, j=b, a\neq b$, то в силу независимости форм ω^k, получим $h^{\alpha}_{abk}=0$.

Если в (2) положить $i=r,\ j=s$ и учесть, что $\lambda^{\alpha}_{r}=\lambda^{\alpha}_{s}=0$, то будем иметь $h^{\alpha}_{rsk}=0$.

Пусть в (2) $i=a, j=p+1$. В этом случае

$$\left(\lambda^{\alpha}_{p+1}-\lambda^{\alpha}_{a}\right)\omega^{a}_{p+1}=h^{\alpha}_{aa(p+1)}\omega^{a}+h^{\alpha}_{a(p+1)(p+1)}\omega^{p+1}+h^{\alpha}_{a(p+1)r}\omega^{r}.$$

Отсюда при $\alpha=m+1$ и $\alpha=m+2$, в силу $\lambda^{m+1}_{p+1}=\lambda^{m+1}_{a}$, получим

$$h^{m+1}_{aa(p+1)}=h^{m+1}_{a(p+1)(p+1)}=h^{m+1}_{a(p+1)r}=0,$$

$$\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{a}_{p+1}=h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^{a}+h^{m+2}_{a(p+1)(p+1)}\omega^{p+1}+h^{m+2}_{a(p+1)r}\omega^{r}.$$

Если в (2) положить $i=a,\ j=r$, то будем иметь $\lambda^{\alpha}_{a}\omega^{a}_{r}=-h^{\alpha}_{aar}\omega^{a}-h^{\alpha}_{ar(p+1)}\omega^{p+1}$. Отсюда при $\alpha=m+1$ и $\alpha=m+2$, в силу $\lambda^{m+2}_{a}=0$, получим $h^{m+2}_{aar}=h^{m+2}_{ar(p+1)}=0$, $\lambda^{m+1}_{a}\omega^{a}_{r}=-h^{m+1}_{aar}\omega^{a}$.

Если в (2) положить $i=j=a$, а затем $i=j=b,\ b\neq a$, то будем иметь

$$d\lambda^{\alpha}_{a}+\lambda^{\beta}_{a}\omega^{\alpha}_{\beta}=h^{\alpha}_{aaa}\omega^{a}+h^{\alpha}_{aa(p+1)}\omega^{p+1}+h^{\alpha}_{aar}\omega^{r},$$

$$d\lambda^{\alpha}_{b}+\lambda^{\beta}_{b}\omega^{\alpha}_{\beta}=h^{\alpha}_{bbb}\omega^{a}+h^{\alpha}_{bb(p+1)}\omega^{p+1}+h^{\alpha}_{bbr}\omega^{r}.$$

Поскольку в этих равенствах левые части равны, то, приравнивая правые части и учитывая независимость форм ω^{a}, ω^{p+1}, ω^{r}, получим $h^{\alpha}_{aaa}=0,\ h^{\alpha}_{aa(p+1)}=h^{\alpha}_{bb(p+1)},\ h^{\alpha}_{aar}=h^{\alpha}_{bbr},\ a\neq b$. Тогда первая из предыдущих формул будет иметь следующий вид:

$$d\lambda^{\alpha}_{a}+\lambda^{\beta}_{a}\omega^{\alpha}_{\beta}=h^{\alpha}_{aa(p+1)}\omega^{p+1}+h^{\alpha}_{aar}\omega^{r}.$$

Отсюда при $\alpha=m+1$ и $\alpha=m+2$ имеем соответственно

$$d\lambda^{m+1}_{a}=h^{m+1}_{aar}\omega^{r},\quad \lambda^{m+1}_{a}\omega^{m+2}_{m+1}=h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^{p+1}.$$

Если (2) положить $i=j=p+1$, то получим

$$d\lambda^{\alpha}_{p+1}+\lambda^{\beta}_{p+1}\omega^{\alpha}_{\beta}=h^{\alpha}_{(p+1)(p+1)a}\omega^{a}+h^{\alpha}_{(p+1)(p+1)(p+1)}\omega^{p+1}+h^{\alpha}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{r}.$$

Отсюда при $\alpha=m+1$ и $\alpha=m+2$ приходим к следующим равенствам:

$$d\lambda^{m+1}_{p+1}+\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{m+1}_{m+2}=h^{m+1}_{(p+1)\,(p+1)\,(p+1)}\omega^{p+1}+h^{m+1}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{r},$$

$$d\lambda^{m+2}_{p+1}+\lambda^{m+1}_{p+1}\omega^{m+2}_{m+1}=h^{m+2}_{(p+1)(p+1)a}\omega^{a}+h^{m+2}_{(p+1)(p+1)(p+1)}\omega^{p+1}+h^{m+2}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{r}.$$

Поскольку $\lambda^{m+1}_{p+1} = \lambda^{m+1}_{a}$, то, подставляя в первое из этих равенств значения $d\lambda^{m+1}_{a}$ и ω^{m+1}_{m+2} из предыдущих равенств, получим следующие соотношения:

$$h^{m+1}_{aar} = h^{m+1}_{(p+1)(p+1)r}\,, \qquad \frac{h^{m+1}_{(p+1)(p+1)(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}} = -\frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+1}_{a}}\,.$$

Подставляя во второе равенство значение ω^{m+2}_{m+1}, приходим к соотношению

$$d\lambda^{m+2}_{p+1} = h^{m+2}_{(p+1)(p+1)a}\omega^{a} + \left(h^{m+2}_{(p+1)(p+1)(p+1)} - h^{m+2}_{aa(p+1)}\right)\omega^{p+1} + h^{m+2}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{r}\,.$$

Полагая в (2) $i = r, j = p+1$, будем иметь $\lambda^{\alpha}_{p+1}\omega^{r}_{p+1} = h^{\alpha}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{p+1}$. Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$ получим $\lambda^{m+1}_{a}\omega^{r}_{p+1} = h^{m+1}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{p+1}$, $\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{r}_{p+1} = h^{m+2}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{p+1}$. Следовательно,

$$\frac{h^{m+1}_{(p+1)(p+1)r}}{\lambda^{m+1}_{a}} = \frac{h^{m+2}_{(p+1)(p+1)r}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}\,.$$

Поскольку все возможные случаи исчерпаны, то в итоге имеем

$$\lambda^{\alpha}_{r} = \lambda^{m+2}_{a} = h^{\alpha}_{rsk} = h^{m+1}_{aa(p+1)} = h^{m+1}_{a(p+1)(p+1)} = h^{\alpha}_{abk} = 0,\ a \neq b\,,$$

$$h^{m+1}_{a(p+1)r} = h^{m+2}_{a(p+1)r} = h^{m+2}_{aar} = h^{\alpha}_{aaa} = 0\,,$$

$$h^{\alpha}_{aa(p+1)} = h^{\alpha}_{bb(p+1)},\ a \neq b\,, \quad h^{\alpha}_{aar} = h^{\alpha}_{bbr},\ a \neq b\,, \quad h^{m+1}_{aar} = h^{m+1}_{(p+1)(p+1)r}\,,$$

$$\frac{h^{m+1}_{(p+1)(p+1)(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}} = -\frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+1}_{a}}\,, \quad \frac{h^{m+1}_{(p+1)(p+1)r}}{\lambda^{m+1}_{a}} = \frac{h^{m+2}_{(p+1)(p+1)r}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}\,.$$

На основании проведенных вычислений также можем составить следующую дифференциальную систему:

$$d\lambda^{m+1}_{a} = h^{m+1}_{aar}\omega^{r}\,, \quad d\lambda^{m+2}_{p+1} = h^{m+1}_{(p+1)(p+1)a}\omega^{a} + \left(h^{m+2}_{(p+1)(p+1)(p+1)} - h^{m+2}_{aa(p+1)}\right)\omega^{p+1} + h^{m+2}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{r}\,,$$

$$\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{a}_{p+1} = h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^{a} + h^{m+2}_{a(p+1)(p+1)}\omega^{p+1}\,, \quad \lambda^{m+1}_{a}\omega^{r}_{a} = h^{m+1}_{aar}\omega^{a}\,,$$

$$\lambda^{m+1}_{a}\omega^{m+2}_{m+1} = h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^{p+1}\,, \quad \lambda^{m+1}_{a}\omega^{r}_{p+1} = h^{m+1}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{p+1}\,, \quad \omega^{\alpha}_{r} = \omega^{m+2}_{a} = 0\,.$$

Если ввести обозначения

$$F_{r} = \frac{h^{m+1}_{aar}}{\lambda^{m+1}_{a}}\,,\ A = \frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}\,,\ B = \frac{h^{m+2}_{(p+1)(p+1)(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}\,,$$

$$G_{a} = \frac{h^{m+2}_{(p+1)(p+1)a}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}\,,\ D = \frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+1}_{a}} = \frac{\lambda^{m+2}_{(p+1)}}{\lambda^{m+1}_{a}}A\,,$$

то приведенную выше дифференциальную систему можем преобразовать к виду

$$d\ln\left|\lambda_a^{m+1}\right| = F_r\omega^r, \quad d\ln\left|\lambda_{p+1}^{m+2}\right| = G_a\,\omega^a + \left(B - A\right)\omega^{p+1} + F_r\omega^r,$$
$$\omega_{p+1}^{\alpha} = A\omega^a + G_a\omega^{p+1}, \quad \omega_a^r = F_r\omega^a, \tag{3}$$
$$\omega_{m+1}^{m+2} = D\omega^{p+1}, \quad \omega_{p+1}^r = F_r\omega^{p+1}, \quad \omega_r^{\alpha} = \omega_a^{m+2} = 0.$$

Приступим к описанию подмногообразия M. Рассмотрим дифференциальную систему $\omega^{\alpha} = 0, \omega^{p+1} = 0, \omega^r = 0$, которая задает распределение $T^{\left(n_1\right)}$. Поскольку $d\omega^{\alpha} = 0, d\omega^{p+1} = 0, d\omega^r = 0$, то распределение $T^{\left(n_1\right)}$ интегрируемо. В силу $\omega_a^{\alpha} = \lambda_a^{\alpha}\omega^a, \ \omega_a^{p+1} = -A\omega^a, \ \omega_a^r = F_r\omega^a$, интегральное многообразие является вполне омбилическим, т.е. представляет собой сферу (т.к. $\lambda_a^{m+1} \neq 0$) размерности p, которую будем обозначать через $S^p\left(R\right)$.

Дифференциальная система $\omega^{\alpha} = 0, \omega^a = 0, \omega^r = 0$ задает распределение $T^{\left(n_2\right)}$. Легко проверить, что $d\omega^{\alpha} = 0, d\omega^a = 0, d\omega^r = 0$. Следовательно, это распределение интегрируемо, и поскольку оно одномерно, то его интегральное многообразие представляет собой кривую, которую будем обозначать через L.

Распределение $T^{\left(0\right)}$, задаваемое системой $\omega^{\alpha} = 0, \omega^a = 0, \omega^{p+1} = 0$, также интегрируемо, и в силу $\omega_r^{\alpha} = \omega_r^a = \omega_r^{p+1} = 0$, его интегральное многообразие представляет собой плоскость размерности μ, которую будем обозначать через E_{μ}.

Рассмотрим теперь дифференциальную систему $\omega^{\alpha} = 0, \omega^r = 0$, которая задает распределение $T^{\left(n_1\right)} + T^{\left(n_2\right)}$, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ прямую сумму $T_x^{\left(n_1\right)} + T_x^{\left(n_2\right)}$. Это распределение фактически совпадает с распределением кодефектности $T^{\left(1\right)}$. Поскольку $d\omega^{\alpha} = 0, d\omega^r = 0$, то распределение $T^{\left(1\right)}$ интегрируемо. Его интегральное многообразие будем обозначать через $\tilde{M}$. Из формул $\omega_a^r = F_r\omega^a$, $\omega_{p+1}^r = F_r\omega^{p+1}$ следует, что $\tilde{M}$ является вполне омбилическим подмногообразием в M. Согласно результатам работы [4], $\tilde{M}$ является эйнштейновым, а само подмногообразие M изометрично или цилиндру над $\tilde{M}$, или цилиндру с $\left(\mu - 1\right)$-мерными плоскими образующием над конусом, построенным над $\tilde{M}$. Ниже решается задача существования и геометрического описания такого цилиндра и конуса.

Дифференцируя внешним образом первое и четвертое уравнения системы (3) и применяя лемму Картана, получим соответственно
$$\begin{gathered} dF_r - F_s\omega_r^s = F_{rs}\omega^s, \ F_{rs} = F_{sr}, \\ dF_r - F_s\omega_r^s = F_rF_s\omega^s. \end{gathered}, \tag{4}$$

Следовательно, $F_{rs} = F_r \cdot F_s$, и мы будем рассматривать только уравнение (4).

Рассмотрим подмногообразие $\tilde{M}$. На этом подмногообразии $T^{\perp}\left(M\right)$ и $T^{(0)}$, как подрасслоения нормального расслоения, являются параллельными в силу $\omega_r^{\alpha} = 0$. Из выражений для $\omega_a^{\alpha}, \omega_{p+1}^{\alpha}, \omega_a^r, \omega_{p+1}^r$ (см. (1)) следует, что в направлениях e_{α} и e_r матрицы второй фундаментальной формы подмногообразия $\tilde{M}$ имеют диагональный вид. Это значит, что нормальная связность подмногообразия $\tilde{M}$ плоская. Тогда, в силу параллельности $T^{\perp}\left(M\right)$ и $T^{(0)}$ в нормальном расслоении подмногообразия $\tilde{M}$, в них индуцируются плоские нормальные связности. Это значит, что в $T^{(0)}$, как в подрасслоении нормального расслоения подмногообразия $\tilde{M}$, векторы e_r можем выбрать так, чтобы они были параллельными. Поскольку при $\omega^r = 0$, т.е. на $\tilde{M}$, векторное поле $\eta = \sum_r F_r e_r$ также является параллельным (это следует из (4)), то вектор e_m можем выбрать так, чтобы он был коллинеарен вектору η. Тогда $\eta = F_m e_m$, $F_r = 0$ при $r \neq m$. Из (4) при $r \neq m$ следует, что $F_m \omega_s^m = 0$. Следовательно, мы должны рассматривать два случая:

(а) $F_m = 0$,

(б) $F_m \neq 0$, $\omega_s^m = 0$.

Рассмотрим случай (а). Пусть $F_m = 0$. Тогда $\omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0$, и, следовательно, распределения $T^{(1)} = T^{(n_1)} + T^{(n_2)}$ и $T^{(0)}$ параллельны на M. Поскольку они сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M, то M является прямым произведением их интегральных многообразий, т.е. $M = \tilde{M} \times E_{\mu}$.

Выясним, что представляет собой $\tilde{M}$ в случае, когда в системе (3) $G_a = 0$. Поскольку, кроме того, $\lambda_a^{m+1} = const \neq 0$, то из системы (3) для $\tilde{M}$ получаем следующую систему:

$$d\ln\left|\lambda_{p+1}^{m+2}\right| = \left(B - A\right)\omega^{p+1}, \quad \omega_{p+1}^a = A\omega^a, \quad \omega_{m+1}^{m+2} = D\omega^{p+1}, \quad \omega_a^{m+2} = 0. \tag{5}$$

Поскольку $d\omega^{p+1} = 0$, то $\omega^{p+1} = dx^{p+1}$, где x^{p+1} – координата по кривой L. Заметим, что в (5) коэффициент A должен быть отличен от нуля, поскольку в противном случае - подмногообразие $\tilde{M}$ будет прямым произведением сферы $S^p\left(R\right)$ и кривой L, и тогда индекс дефектности $\tilde{M}$ будет отличен от нуля. Дифференцируя внешним образом второе уравнение системы (5) , применяя лемму Картана и учитывая независимость формы ω^a, получим $dA = -\left(\left(\lambda_a^{m+1}\right)^2 + A^2\right)\omega^{p+1}$. Интегрируя это уравнение, приходим к следующим соотношениям:

$$A = \lambda_{a}^{m+1} tg\left(c_1 - \lambda_{a}^{m+1} x^{p+1}\right),\ D = \lambda_{p+1}^{m+2} tg\left(c_1 - \lambda_{a}^{m+1} x^{p+1}\right),$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Из первого уравнения системы (5) имеем $\lambda_{p+1}^{m+2} = c_2 e^{\int (B-A) dx^{p+1}}$, где $c_2 (\neq 0)$ — постоянная интегрирования. Дифференцируя внешним образом первое уравнение системы (5), получим $dB = \tilde{B}\omega^{p+1}$. Следовательно, B также является функцией от x^{p+1}.

Поскольку внешнее дифференцирование остальных уравнений системы (5) к новым соотношениям не приводит, то приступим к изучению кривой L. Так как на этой кривой $\omega^{\alpha} = 0,\ \omega^{a} = 0$, то для векторов $e_{p+1},\ e_{m+1},\ e_{m+2}$ имеем

$$de_{p+1} = \left(\lambda_{a}^{m+1} e_{m+1} + \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2}\right)\omega^{p+1} = n_2 \omega^{p+1},\ \ de_{m+1} = \left(De_{m+2} - \lambda_{a}^{m+1} e_{p+1}\right)\omega^{p+1},$$

$$de_{m+2} = \left(-De_{m+1} - \lambda_{p+1}^{m+2} e_{p+1}\right)\omega^{p+1}.$$

Следовательно, кривая L находится в трёхмерном пространстве. Более того, из первого равенства следует, что вектор $n = \dfrac{n_2}{\left|n_2\right|}$ выступает в качестве единичного вектора главной нормали кривой L, а кривизна кривой L равна $\left|n_2\right|$. Теперь легко видеть, что единичным вектором бинормали кривой L служит вектор

$$\tilde{b} = \frac{1}{\left|n_2\right|}\left(-\lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+1} + \lambda_{a}^{m+1} e_{m+2}\right).$$

Формулы Френе кривой L имеют следующий вид:

$$\frac{de_{p+1}}{dx^{p+1}} = \left|n_2\right| n,\quad \frac{dn}{dx^{p+1}} = -\left|n_2\right| e_{p+1} + \left(D + \frac{\lambda_{a}^{m+1}}{\left|n_2\right|^2}\frac{d\lambda_{p+1}^{m+2}}{dx^{p+1}}\right)\tilde{b},$$

$$\frac{d\tilde{b}}{dx^{p+1}} = -\left(D + \frac{\lambda_{a}^{m+1}}{\left|n_2\right|^2}\frac{d\lambda_{p+1}^{m+2}}{dx^{p+1}}\right) n.$$

Если $B = A$, что равносильно условию $\lambda_{p+1}^{m+2} = const (\neq 0)$ или $\left|n_2\right| = const(\neq 0)$, то в этом случае

$$\frac{de_{p+1}}{dx^{p+1}} = \left|n_2\right| \cdot n,\quad \frac{dn}{dx^{p+1}} = -\left|n_2\right| e_{p+1} + Db,\quad \frac{db}{dx^{p+1}} = -Dn.$$

Из этих соотношений следует, что при $B = A$ кривая L имеет постоянную кривизну, а её кручение равно D.

Поскольку $\rho = \left|n_1\right|^2 - < n_1, H > = \left|n_2\right|^2 - < n_2, H > = -p\left(\lambda_{a}^{m+1}\right)^2$, то подмногообразие $\tilde{M}$ имеет отрицательную эйнштейнову константу. Условие $< n_1, n_2 > = \left|n_1\right|^2$ равносильно тому, что секционные кривизны $k\left(e_a \wedge e_{p+1}\right)$ положительны и постоянны.

Последнее следует из того, что $\left|n_1\right|^2 = \left(\lambda_a^{m+1}\right)^2 = const$. Если $B = A$, то $\left|n_2\right|$ также является постоянным, а n_2 образует с n_1 постоянный острый угол. Если $B \neq A$, то из условия $\left|n_1\right|^2 =< n_1, n_2 >$ следует, что $\left|n_1\right| = \left|n_2\right| \cos\varphi$ (φ - угол между векторами n_1 и n_2), и, следовательно, постоянными, является произведение $\left|n_2\right| \cos\varphi$. Вектор $\lambda_a^{m+1} e_{m+1} - A e_{p+1}$ является вектором средней кривизны сферы $S^p\left(R\right)$. Следовательно, $R^2 = \left(\left(\lambda_a^{m+1}\right)^2 + A^2\right)^{-1}$. Подставляя значение A и преобразуя его, получим

$$R = \left|\frac{\cos\left(c_1 - \lambda_a^{m+1} x^{p+1}\right)}{\lambda_a^{m+1}}\right|.$$

Таким образом, радиус R изменяется вдоль кривой L. Следовательно, подмногообразие $\tilde{M}$ мы можем трактовать как каналовое подмногообразие.

Пусть λ_a^{m+1} – произвольная ненулевая постоянная, а λ_{p+1}^{m+2}, A, D определяются таким же образом, как и выше, где B – произвольная гладкая функция от x^{p+1}, и, кроме того, $\omega^{p+1} = dx^{p+1}$. В евклидовом пространстве E_{p+3} рассмотрим следующую дифференциальную систему:

$$\omega^{m+1} = \omega^{m+2} = 0, \quad \omega_{m+1}^{m+2} = D\omega^{p+1}, \quad \omega_a^{m+1} = \lambda_a^{m+1}\omega^a,$$

$$\omega_{p+1}^{m+1} = \lambda_a^{m+1}\omega^{p+1}, \quad \omega_a^{m+2} = 0, \quad \omega_{p+1}^{m+2} = \lambda_{p+1}^{m+2}\omega^{p+1}, \quad \omega_{p+1}^a = A\omega^a.$$

Путем прямого вычисления легко проверить, что эта система вполне интегрируема. Она и задает подмногообразие $\tilde{M}$. Итак, в рассматриваемом случае подмногообразие M является прямым произведением эйнштейнова каналова подмногообразия $\tilde{M}$ и плоскости L_μ. Отметим, что если $B = 0$, то

$$\lambda_{p+1}^{m+2} = \frac{c_2}{\left|\cos\left(c_1 - \lambda_a^{m+1} x^{p+1}\right)\right|}.$$

Рассмотрим, теперь случай (б), когда в системе (3) $F_m \neq 0$, $F_r = 0$, $r \neq m$, $\omega_s^m = 0$. Кроме того, предположим также, что $G_a = 0$. Тогда система (3) принимает следующий вид:

$$d\ln\left|\lambda_a^{m+1}\right| = F_m\omega^m, \quad d\ln\left|\lambda_{p+1}^{m+1}\right| = \left(B - A\right)\omega^{p+1} + F_m\omega^m,$$

$$\omega_{p+1}^a = A\omega^a, \quad \omega_a^m = F_m\omega^a, \quad \omega_{m+1}^{m+2} = D\omega^{p+1}, \tag{6}$$

$$\omega_{p+1}^m = F_m\omega^{p+1}, \quad \omega_r^\alpha = \omega_a^{m+2} = 0, \quad \omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0, r \neq m.$$

Поскольку $\omega_s^m = 0$, $\omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0, \quad r \neq m$, то распределение N, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ линейную оболочку векторов $e_{p+2}, \cdots, e_{m-1}$, является параллельным на M. Ортогональное дополнение N, т.е. распределение $T^{(n_1)} + T^{(n_2)} + K$, где K – одномерное распределение, образуемое прямой с направляющим вектором e_m, также является параллельным на M. Поскольку эти распределения сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M, то M разлагается в прямое произведение их интегральных многообразий. Интегральное многообразие распределения N представляет собой $(\mu - 1)$-мерную плоскость $E_{\mu-1}$. Интегральное многообразие распределения $T^{(n_1)} + T^{(n_2)} + K$ представляет собой $(p+2)$-мерное подмногообразие, которое будем обозначать через M'. Поскольку $de_m = -F_m\left(\omega^a e_a + \omega^{p+1} e_{p+1}\right)$, то вектор e_m является постоянным при $\omega^a = \omega^{p+1} = 0$. Отсюда следует, что M' является конусом (с исключенной точечной вершиной) над $\tilde{M}$. Далее, полагая в (6.4) $r = m$, получим $dF_m = F_m^2 \omega^m$. Поскольку $d\omega^m = 0$, то можем полагать $\omega^m = dx^m$, где x^m – координата на образующей конуса с единичным вектором e_m. Решая это уравнение, получим $F_m = \dfrac{1}{c_3 - x^m}$. Из первого уравнения системы (6) имеем $\lambda_a^{m+1} = \dfrac{c_4}{c_3 - x^m}$, $c_4 \neq 0$. Дифференцируя внешним образом третье уравнение системы (6) и учитывая независимость формы ω^a, приходим к уравнению

$$dA = -\left(A^2 + \frac{c_4^2 + 1}{\left(c_3 - x^m\right)^2}\right)\omega^{p+1}.$$

Это уравнение будем интегрировать вдоль кривой L, т.е. будем предполагать, что координата x^m фиксирована. Тогда $\omega^m = dx^m = 0$ и, как легко проверить, $d\omega^{p+1} = 0$. Следовательно, $\omega^{p+1} = dx^{p+1}$, где x^{p+1} – координата на кривой L. В результате интегрирования находим

$$A = \frac{\sqrt{c_4^2+1}}{c_3 - x^m}\, tg \frac{c_5 - \sqrt{c_4^2+1}\, x^{p+1}}{c_3 - x^m}.$$

Дифференцируя внешним образом второе уравнение системы (6), приходим к выводу, что при фиксированном значении x^m B является произвольной функцией от x^{p+1}. Из второго уравнения системы (6) находим

$$\lambda_{p+1}^{m+2} = c_6 e^{\int (B-A) dx^{p+1}}, \quad c_6 \neq 0.$$

Учитывая связь между D и A, получаем

$$D = \frac{c_6}{\lambda_a^{m+1}}\, A\, e^{\int (B-A) dx^{p+1}}.$$

В полученных формулах c_3, c_4, c_5, c_6 являются постоянными интегрирования. Непосредственно можно проверить, что при фиксированном значении x^m, т.е. при фиксированной точке на образующей K, уравнения $\omega^{m+1}=0$, $\omega^{m+2}=0$, $\omega^m=0$ совместно с уравнениями системы (6) образуют вполне интегрируемую дифференциальную систему, которая и задает эйнштейново подмногообразие $\tilde{M}$ коразмерности три. Подмногообразие M представляет собой прямое произведение конуса над $\tilde{M}$ и плоскости размерности $\mu-1$, т.е. $M=C^{p+2}\times E_{\mu-1}$, где $C^{p+2}-$ конус над $\tilde{M}$.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть тензор Риччи m-мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M индекса дефектности μ евклидова пространства E_{m+2} допускает только одно ненулевое собственное значение и этому собственному значению соответствуют только два линейно независимых главных вектора кривизны n_1, n_2 с кратностями p_1, p_2 соответственно. Тогда μ совпадает с индексом относительной дефектности, а само M или локально является подмногообразием кодефектности два (если $p_1=p_2=1$), или оно изометрично цилиндру с μ-мерными плоскими образующими над некоторым эйнштейновым подмногообразием $\tilde{M}$ либо цилиндру с ($\mu-1$)-мерными плоскими образующими над конусом, построенному над $\tilde{M}$ (если $p_1\geq 2$, $p_2=1$). Подмногообразие $\tilde{M}$ можно трактовать как каналовое подмногообразие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lumiste Ü. *Semiparallel submanifolds in space forms*.- New York: Springer, 2009.- 306 p.
2. Мирзоян В.А. *Структурные теоремы для римановых Ric- полусимметрических пространств* // Изв. Вузов. Математика. - 1992. - № 6. - С. 80-89.
3. Мирзоян В.А. *Классификация Ric-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах* // Матем. сб. – 2000. - 191, № 9. – С. 65-80.
4. Мирзоян В.А. *Скрещенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric-полупараллельных подмногообразий* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2003. - 67, № 5. – С. 107-124.
5. Мирзоян В.А. *Структурные теоремы для Ric-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий* // Матем. сб. – 2006. - 197, № 7. – С. 47-76.
6. Мирзоян В.А. *Классификация одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с интегрируемым распределением кодефектности* // Матем. сб. – 2008. - 199, № 3. – С. 69-94.
7. Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С. *Нормально плоские минимальные полуэйнштейновы подмногообразия с однократными главными векторами кривизны* // Докл. НАН Армении. – 2009. - 109, № 2. – С. 119-125.

8. Мирзоян В.А. *Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах* // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2011. - 75, № 6. – С. 47-78.
9. Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С. *О нормально плоских* $Ric-$*полусимметрических подмногообразиях в евклидовых пространствах* // Изв.вузов.Матем. - 2012. -№ 9. -С. 19-31.
10. Mirzoyan V.A. *General classification of normally flat* Ric*-semisymmetric submanifolds* // National Acad. Sci. of Armenia. Reports. – 2012. - 112, № 1. – P. 19-29.
11. Szabo Z.I. *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$. *I. The local version* // J.Differential Geom. – 1982. - 17, № 4. – P. 531-582.
12. Chern S.S., Kuiper N. *Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Eudlidean Space* // Ann. of. Math. – 1952. - 56, № 3. -P. 422-430.

Материал поступил в редакцию 25.01.2016.

ԵՐԿՈՒ ԿՈՉԱՓԻ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՐԹ ՌԻՉՉԻ-ԿԻՍԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Վ.Ա. Միրզոյան, Ա.Ռ. Նազարյան

Էվկլիդեսյան տարածություններում տրվում է երկու կոչափի նորմալ հարթ ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը այն պայմանի դեպքում, որ ռեգուլյարության ինդեքսը հավասար է երկուսի, իսկ սինգուլյարության ինդեքսը՝ զրոյի: Մանրամասն ուսումնասիրվում է Էյնշտեյնյան ենթաբազմաձևությունների մի դաս, որոնք մեկնաբանվում են որպես կանալային ենթաբազմաձևություններ:

Առանցքային բառեր. ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ, կոներ, էյնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ:

ON THE GEOMETRY OF A CLASS OF NORMALLY FLAT RICCI-SEMISYMMETRIC SUBMANIFOLDS OF CODIMENTION TWO IN EUCLIDEAN SPACES

V.A. Mirzoyan, A.R. Nazaryan

A geometric description of a class of normally flat Ricci semi-symmetric submanifolds of codimension two with zero singularity index and regularity index two in Euclidean spaces is done. The class of Einstein submanifolds which are canal submanifolds is investigated in detail.

Keywords: Ricci-semisymmetric submanifolds, cones, Einstein submanifolds.

УДК 517. 948

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОГРУЖЕНИЯ В E^3 ОДНОГО КЛАССА M_1 БЕСКОНЕЧНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Р.Ц. Мусаелян
(Горисский государственный университет)
E-mail: rubmus49@gmail.com

В полной метрике $ds^2 = dx^2 + \left(e^{-x} + b(y)\right)^2 dy^2$ отрицательной кривизны рассматриваются бесконечные многоугольники (далее БМ) определенного класса. Существование двух классов БМ в метрике более общего вида, чем в указанной выше, доказано в работе [1]. Основным результатом этой работы является следующая теорема: в указанной выше метрике любой бесконечный многоугольник из класса M_1 регулярно изометрически погружается в E^3.

Ключевые слова: метрика, погружение, производная, кривизна, геодезические линии.

1°. Формулировка теоремы. Пусть полная метрика отрицательной гауссовой кривизны задана посредством линейного элемента

$$ds^2 = dx^2 + \left(e^{-x} + b\left(y\right)\right)^2 dy^2. \tag{1}$$

Пусть далее функция $b\left(y\right) > 0$ для любого $y \epsilon \left(-\infty; \infty\right)$ принадлежит в указанной области классу $C^{4.1} -$ ограниченных функций. Отметим, что класс $C^{4.1} -$ заданные на прямой ограниченные функции вместе с производными до 4-го порядка и точными константами Липшица для производных 4-го порядка. Из этого предположения следует, что кривизна $K\left(x, y\right)$ метрики (1) удовлетворяет условию

$$-1 < K\left(x, y\right) < 0. \tag{2}$$

Теорема 1. В метрике (1) любой БМ из класса M_1 регулярно изометрически погружается в E^3.

Отметим,что БМ - это выпуклое множество в указанной метрике, граница которого состоит из геодезических линий. Вершины БМ находятся на абсолюте. Что касается класса M_1, то это БМ, для каждого из которых можно указать отвечающий ему орицикл O такой, что нижняя грань длин ортогональных проекций сторон БМ на указанный орицикл O положительна (см.[1]).

1°. Вспомогательные результаты. Система уравнений теории поверхностей, известная как система уравнений Петерсона-Кодации и Гаусса (см.[2]), в случае, когда кривизна метрики $K(x, y) < 0$, превращается в следующую основную систему (см.[3]):

$$\begin{aligned} r_x + s r_y &= A_0 + A_1 r + A_2 s + A_3 r^2 + A_4 rs + A_5 r^2 s, \\ s_x + r s_y &= A_0 + A_1 s + A_2 r + A_3 s^2 + A_4 rs + A_5 r s^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Коэффициенты $A_i(x, y)$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ системы (3) в заданной метрике - вполне определенные функции.

Пусть коэффициенты $A_i(x, y)$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ основной системы в некоторой полосе $\Pi_a = \{0 \leq x \leq a, -\infty < x < +\infty\}$ (значение $a = +\infty$ не исключается) принадлежат классу $c^{1,1}$- ограниченных функций. Считается также, что начальные данные этой системы $\{r_0(y), s_0(y)\} \in c^{1,1}$ на оси оу. При этих условиях справедливо следующее утверждение, доказательство которого приведено в работе [3].

Теорема 2 (Теорема существования и единственности). В некоторой полосе $\Pi_{h_1}, h_1 \leq a$ существует единственное решение $\{r(x, y), s(x, y)\} \in c^{1,1}$ системы (3) с начальными данными $\{r_0(y), s_0(y)\} \in c^{1,1}$ на оси оу.

Лемма 1. Пусть начальные данные на оси оу удовлетворяют неравенству

$$0 < 2\delta \leq |r_0(y) - s_0(y)|, \delta = const.$$

Тогда в некоторой после Π_{h_2}, $h_2 \leq h_1$ (h_1 – число, гарантированное теоремой существования и единственности) решение $\{r(x, y), s(x, y)\}$ основной системы удовлетворяет условию

$$\delta \leq |r(x, y) - s(x, y)|.$$

Доказательство этой леммы также приведено в работе [3]. Для ширины h_2 полосы Π_{h_2} может быть указана оценка снизу, зависящая от коэффициентов основной системы $A_i(x, y)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 5)$ и от начальных данных.

Далее будем пользоваться результатом Оссермана (см.[4]). Согласно этому результату, если кривизна полной двумерной метрики ограничена сверху отрицательной константой, то метрика конформно отображается на круг, границу которого назовем абсолютом. Если кривизна $K(x, y)$ метрики удовлетворяет следующему интегральному условию:

$$\frac{\iint_{Д} K d\sigma}{\iint_{Д} d\sigma} \leq -\varepsilon < 0, \tag{4}$$

то можно считать $K(x, y) < 0$. Не ограничивая общности, можно предположить, что Д в метрике (1) представляет собой квадрат с центром в начале координат со стороной 2d. Несложные вычисления приводят (4) к следующему неравенству:

$$\frac{-1}{1 + \frac{A^*}{shd}} \leq -\varepsilon, \tag{5}$$

где $A^* = -\int_{-d}^{d} b(y) dy$. Неравенство (5) выполняется, если знаменатель - ограниченная величина. Это с учетом ограниченности $b(y)$ ведет к ограниченности величин $\frac{d}{shd}$. Ограниченность последнего очевидна. Таким образом, для метрики (1) теорема Оссермана применима.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $БМ \epsilon M_1$ и h - любое положительное число. Среди орициклов, эквидистантных О, можно указать такой орицикл O_t, который отсекает все вершины БМ, причем если H_i – любая вершина БМ и ξ_i - прямая, соединяющая H с H_i, то эквидистантная полоса с базой ξ_i и шириной 2h содержит часть БМ, отсеченную орициклом O_t и содержащую H_i.

Доказательство. По определению класса M_1, для каждого $БМ\epsilon M_1$ существует орицикл О, на котором проектируются стороны БМ, причем точная нижняя грань длины проекции положительна $inf\{длин(P_iP_j)\} > 0$. Это значит что существует орицикл O_*, эквидистантный к O, такой, что все стороны БМ, за исключением тех, которые в рассматриваемой метрике описываются уравнением $y = const$, находятся по одну сторону относительно орицикла. В уравнении геодезических в метрике (1) (см. [5], формулы (15)) вне орикруга, границей которого является орицикл O_*, коэффициенты - определенные положительные величины. С другой стороны, по теореме 3 (см. [5]) для каждой стороны БМ существует отвечающее ей число ν_1 такое, что в плоскости Лобачевского кривизны $-\nu_1^2$ (плоскость $Л_{\nu_1}$) существует мажорантное уравнение. Обозначим множество $\nu = \{\nu_1^i\}$ всех чисел ν_1, отвечающих каждой стороне $БМ\epsilon M_1$, где i пробегает счетное множество I. Покажем, что $\inf_{i\epsilon I}\{\nu_1^i\} = \nu_{11} > 0$. Отметим, что сторона $БМ\epsilon M_1$ в плоскости $Л_\nu$, имеет вид

$$y = \pm\frac{1}{2\nu}\sqrt{c_1 - e^{2\nu x} +}\ c_2. \tag{6}$$

Если учесть, что эта прямая имеет на оси оу проекцию длины d_1, то для параметров c_1 и c_2 получим

$$c_1 = \frac{\nu^2(p_i - p_j)}{4} = \frac{\nu^2 d_1^2}{4}, \qquad c_2 = \frac{(p_i + p_j)}{2}, \tag{7}$$

где p_i и p_j – основания проекции на оси оу. Если обратиться к неравенствам (24) работы [5], а также к формулам (6) и (7) этой работы и определению класса M_1 (т.е. $inf\{длин(p_i,\ p_j)\} > 0$), то нетрудно заключить, что $inf\{\nu_1\} = \nu_{11} > 0$. Очевидно также, что можно выбрать $\tilde{\varepsilon}_0$ в формуле (26) работы [5] так, чтобы любой $\varepsilon\epsilon(0, \tilde{\tilde{\varepsilon}}_0)$, *где* $\tilde{\tilde{\varepsilon}}_0 \le \tilde{\varepsilon}_0$, был пригоден для сторон БМ в плоскости $Л_{\nu_{11}}$. Если ввести в формулах (6) и (7) параметр ε так, как это сделано в формуле (29) работы [5], то для плоскости $Л_{\nu_{11}}$ числа t_1, ν_{11}, d_1 будут связаны соотношением

$$t_1 = \frac{1}{\nu_{11}}\ln\frac{d_1\nu_{11}}{2\varepsilon}. \tag{8}$$

Далее, если $|t|$ - расстояние в метрике (1) между осью оу и стороной $БМ\epsilon M_1$, длина проекции которой на оси оу равна d_1, то очевидно, $|t| < |t_1|$. По определению, $d_1 > 0$ для БМ. Это значит,что $|t_0| = sup\{|t_1|\}$ конечно. Если взять орициклы O_t, где $|t| > |t_0|$, то все они будут удовлетворять требованию леммы.

Теперь покажем, что длины частей O_t, отсекающих вершины H_i, равномерно стремятся к нулю при $|t| \to \infty$. Если обозначить длины отрезков, о которых говорится, через $\eta(x, d_1)$, то получим

$$\eta(x, d_1) \le \frac{1}{\nu_{11}}e^{-x}\left(\frac{-\varepsilon}{\nu_{11}}\sqrt{\frac{\nu_{11}^2 d_1^2}{4\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}e^{2\nu_{11}x} +}\ \frac{d_1}{2}\right). \tag{9}$$

Правая часть неравенства (9) - это выражение, показывающее длины дуг орициклов, заключенных между геодезическими линиями $y = \xi_i = const$ и $y = \lambda_{11}(x)$ (см. в [5] формулу (29)) в плоскости $Л_{\nu_{11}}$. Правая часть (9), очевидно, равномерно стремится к нулю при $x \to -\infty$. Теперь нетрудно указать такое число t_h , что при всех $t \geq t_h$ каждый орицикл O_t будет удовлетворять требованиям леммы. Лемма доказана.

3°. Доказательство теоремы 1. По известной теореме (см. [6]), если метрика удовлетворяет условию $|B_x(x,y)| < C$, где $B(x,y)$ - функция метрики в полугеодезических координатах, то она изометрически погружается в E^3 в виде регулярной поверхности. Более того, можно выписать параметрические уравнения реализации. Применяя эту теорему для метрики (1), заключаем, что в той части, где выполняется вышеприведенное условие, часть метрики регулярно изометрически погружается в E^3. Отметим, что с помощью замен переменных (параллельный перенос) можно добиться погружения орикруга, содержащего в себе другой, наперед заданный.

Обозначим бесконечно удаленную точку орикруга через Н. Все прямые ξ_i орикруга, проходящие через Н, параллельны между собой. Пусть ξ- один из лучей, принадлежащих этим прямым. Пусть xoy - полугеодезическая система координат, положительная полуось oy которой совпадает с полупрямой $\tilde{\xi}$ (граничная точка $\tilde{\xi}$- начало координат), а линии x - геодезические, ортогональные оси оу. На оси оу возьмем сегмент $[y_0, y_1]$, где $0 < y_0 < y_1$. В этом сегменте угловые коэффициенты осимптотических линий в метрике, очевидно, будут иметь вид

$$r_0(y) = \frac{k_0(y)\sqrt{1 - e^{-2y}}}{e^{-y}}, \quad s_0(y) = -r_0(y). \tag{10}$$

Напомним, что $k_0(y) = k(o,y), k = \sqrt{-K(x,y)}$, а $K(x,y) -$ кривизна метрики (1). Продолжим теперь эти функции на всю ось оу так, чтобы полученные после продолжения функции $\widetilde{r_0}(y)$ и $\widetilde{s_0}(y)$ (совпадающие на сегменте $[y_0, y_1]$ соответственно с $r_0(y)$ и $s_0(y)$) принадлежали классу $C^{1.1}$ и на оси оу выполнялось неравенство $|\widetilde{r_0}(y) - \widetilde{s_0}(y)| \geq 2\delta$, где $\delta = const$.

Запишем основную систему для указанной полугеодезической системы координат. По теореме существования и единственности (см [3]), начальные данные $\{\widetilde{r_0}(y),\ \widetilde{s_0}(y)\}$ определяют решение этой системы в некоторой полосе. По лемме 1, в некоторой полосе, ширина которой не превосходит ширины, гарантированной теоремой, решение удовлетворяет условию $|\widetilde{r}(x,y) - \widetilde{s}(x,y)| \geq \delta > 0$. Пусть это будет полоса $П_{h_1} = \{0 \leq x \leq h_1, -\infty < y < +\infty\}$. Полученное справедливо и для полосы $П_{-h_1} = \{-h_1 \leq x \leq 0, -\infty < x < +\infty\}$. Таким образом, погружена эквидистантная полоса ширины $2h_1$ с базой ξ. В малой окрестности отрезка $[y_0, y_1]$ асимптотическая сеть в погруженной части совпадает с аналогичной сетью, ранее погруженной. Следовательно, можно указать число $h \leq h_1$ такое, что в указанной окрестности можно построить криволинейный четырехугольник, ограниченный отрезками d_1, d_2 двух орициклов O_1 и O_2, эквидистантных данному орициклу O (предположим, что $O_1 \supset O_2$). Рассмотрим в метрике (1) фигуру, полученную присоединением к орикругу O_1 той части ($ЭП_{2h}$) (эквидистантная полоса ширина $2h$), которая отсекается отрезком d_1 и лежит вне O_1. Эта фигура регулярно изометрически погружается в E^3.

Пусть имеется конечное или счетное множество прямых $\{\xi_i\}$, проходящих через точку H. Точки пересечения этих прямых с орициклом O_1 образуют на нем конечное или счетное множество точек. Будем предполагать, что точная нижняя грань расстояний между этими точками по дуге орицикла O_1 положительна. Очевидно, вышеуказанное число $h > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы части (ЭП) с базой ξ_i и шириной $2h$, присоединенные к орикругу $\widetilde{O_1}$ таким образом, как это было сделано при получении вышеуказанной фигуры, не пересекались. Это значит, что в фигуре, полученной таким образом, в целом существует асимптотическая сеть. Значит, эта фигура регулярно изометрически погружается в E^3.

Обратимся к $БМ \in M_1$. Пусть $\{O_t\}$ - множество орициклов, выбранных по числу h и обладающих свойством, указанным в лемме 2. Построим прямые ξ_i, соединяющие бесконечно удаленную точку H орициклов $\{O_t\}$ с вершинами данного $БМ \in M_1$. Выберем такой орицикл O_t из указанного множества, чтобы части $(ЭП)_{2h}$ с базами ξ_i и шириной $2h$, присоединенные к орикругу $\widetilde{O_t}$ так, как это было сделано выше, не пересекались. Так как метрика задана в полосе $П_{\tilde{a}} = \{0 \le x \le \tilde{a}, -\infty < y < \infty\}$ в виде (1), то линии x-геодезические, и поэтому число $\tilde{h} \le \tilde{a}$, равное ширине полосы $П_{\tilde{h}} = \{0 \le x \le \tilde{h}, -\infty < y < \infty\}$ в параметрической плоскости, равно также ширине соответствующей полосы в метрике (1). Поэтому полученная таким образом фигура покрывает данный $БМ \in M_1$. Это значит, что БМ регулярно изометрически погружается в E^3 в виде поверхности. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусаелян Р.Ц. *О некомпактных областях в метриках отрицательной кривизны* // Учен. записки Арцах. унив.-2016.-1.
2. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. *Дифференциальная геометрия. Первое знакомство*.- М., 1990.
3. Позняк Э.Г. *О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны*. - Укр. геометр. сборник.- 1966.- 3.
4. Osserman R. *On the inequality* $\Delta u \ge f(u)$ // Pacif. J. Math.- 1957.- 7.- P. 1641-1647.
5. Мусаелян Р.Ц. *Мажорантные уравнения в метрике* $ds^2 = dx^2 + \left(e^{-x} + b(y)\right)^2 dy^2$ // Математика в высшей школе.- 2015.- Т.11, N 3.- С. 38-44.
6. Мусаелян Р.Ц. *О регулярном погружении в целом в* E^3 *некоторых полных метрик знакопеременной кривизны* // АН АрмССР.- 1981.- LXXIII.

Материал поступил в редакцию 09.03.2016.

M_1 ԴԱՍԻՆ ՊԱՏԿԱՆՈՂ ԱՆՎԵՐՋ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՆԿՂՄԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ E^3-ՈՒՄ

Ռ.Ծ. Մուսայելյան

Դիտարկվում են բացասական կորությամբ լրիվ $ds^2 = dx^2 + \left(e^{-x} + b(y)\right)^2 dy^2$ մետրիկայում անվերջ բազմանկյուններ՝ պատկանող որոշակի դասի: Այդպիսի 2 դասերի

բազմանկյունների գոյությունն ավելի ընդհանուր մետիկայում, քան դիտարկվողը, ապացուցված է [1] աշխատանքում: Այս աշխատանքի հիմնական արդյունքը հետևյալ թեորեմն է. վերը նշված մետրիկայում ցանկացած անվերջ բազմանկյուն, պատկանող M_1 դասին, ռեգուլյար, իզոմետրիկ ընկղմվում է E^3-ում:

Առանցքային բառեր. մետրիկա, ընկղմում, ածանցյալ, կորություն, գեոդեզիկական գծեր:

IMMERSION OF INFINITE POLYGONALS INFO E^3 BELONGIG TO SLASS M_1

R. Ts. Musaelyan

Infinite polygonals belonging to sertain slass in $ds^2 = dx^2 + \left(e^{-x} + b(y)\right)^2 dy^2$ complete metrie of negative curvature is considered. The existence of polnonals of thrse tuo ckasses in a more general metric than the one being observed is proved in the work (1). The general result of this work is the following theorem. In the obove mentioned metric any infinite polonal belonging bo class M_1 immerses info E^3 in regular, isometrie way.

Keywords: metrika, immersion, derivative, curvature, geodesic line.

УДК 517.7.53

МНОЖЕСТВО ТОЧЕК ЖЮЛИА ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ ЭКВИМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ПО КАСАТЕЛЬНЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ

М.М. Мирзоян, А.Н. Айрапетян
(Армянский государственный экономический университет)
E-mail: ani.mirzoyan91@gmail.com, arkady.hayrapetyan@mail.ru

Для нормальных в смысле Монтеля [1,2] и эквиморфных [3] в круге функций доказывается теорема о точках Жюлиа [4].

Ключевые слова: предельные множества, нормальные эквиморфные функции, множество точек Жюлиа.

Пусть $D:|z|<1$ - единичный круг; $\Gamma:|z|=1$ - единичная окружность; Ω - сфера Римана. В работе Х. Э. Мехия [3] функция $f:D\to\Omega$ названа эквиморфной функцией, если f есть композиция $f(z)=g(h(z))$ некоторой мероморфной функции $g(z)$ в круге D и эквиморфизма $h:\ D\to D$, т.е. такого гомеморфизма круга D на себя, что h, h^{-1} равномерно непрерывны относительно гиперболической метрики единичного круга [1].

Пусть $\xi=e^{i\varphi}\in\Gamma$. Для произвольных действительных чисел α и q, $0<\alpha<\infty$, $q\ge 0$ назовем правым q-путем $L^{+}(\xi,q,\alpha)$ всякую кривую, которая задается непрерывной на $[0;1)$ функцией $z=z(t)$ со свойствами:

$$\lim_{t\to 1} z(t)=\xi\,;\ \left|z(t)-\xi\right|<\frac{1}{2};\ \theta<\arg z(t)<\theta+\frac{\pi}{6},\ \arg z(t)\to 0 \text{ (монотонно) при } t\to 1 \text{ и}$$

$$\lim_{t\to 1}\left(1-\left|z(t)\right|\right)\left|\arg z(t)-\theta\right|^{-q-1}=\alpha\,.$$

Назовем правым q^{*}-путем $L^{+}\left(\xi,q^{*},\alpha\right)$ правый q-путь, задающийся уравнением

$$z=\left[1-\alpha\left(\varphi-\theta\right)^{q+1}\right]e^{i\varphi},\ \varphi\in\left(\theta;\theta+\alpha^{-\frac{1}{1+q}}\right].$$

Обозначим через $L^{-}(\xi,q,\alpha)$ ($L^{-}(\xi,q^{*},\alpha)$), $0<\alpha<\infty, q\ge 0$ и назовем левым q-путем (q^{*}-путем) образ правого q-пути $L^{+}(\xi,q,\alpha)$ ($L^{+}(\xi,q^{*},\alpha)$) при симметрии относительно радиуса $h(\xi,0)$ круга D в точке $\xi=e^{i\varphi}\in\Gamma$. Правые и левые q-пути (q^{*}-пути) назовем q-путями (q^{*}-путями) $L(\xi,q,\alpha)$ ($L(\xi,q^{*},\alpha)$) или просто $L(\xi,q)$ ($L(\xi,q^{*})$).

Для произвольных $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$ назовем (q_1, q_2)-углом $\left((q_1, q_2)^*\right)$ в точке $\xi \in \Gamma$ и обозначим через $\Delta(\xi, \alpha, \beta, q_1, q_2, \delta)$ ($\Delta^*(\xi, \alpha, \beta, q_1, q_2, \delta)$) или просто $\Delta(\xi, q_1, q_2)$ ($\Delta^*(\xi, q_1, q_2)$), если нас не интересуют размеры этого угла, подобласть круга D, ограниченную двумя разными $L(\xi, q_1, \alpha)$ ($L(\xi, q_1^*, \alpha)$) и $L(\xi, q_2, \beta)$ ($L(\xi, q_2^*, \beta)$) путями (возможен случай $q_1 = q_2$) и окружностью $|z - \xi| = \delta$, где δ - достаточно малое положительное число.

Пусть Z - произвольное топологическое пространство. Для произвольного отображения f круга D в Z, $f : D \to Z$ произвольной точки $\xi \in \Gamma$ и произвольного множества $S \subset D$, для которого ξ является предельной точкой, предельное множество $C(f, \xi, S)$ определяется как пересечение

$$C(f, \xi, S) = \bigcap_{r>0} \overline{f(V_r(\xi) \cap S)}, \text{ где } V_r(\xi) = \{z \in D; |z - \xi| < r\}, r > 0$$

и черта замыкания множества.

Следуя В.И. Гаврилову [4], последовательность точек $\{z_n\}, z_n \in D, n = 1, 2, \dots$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$ называют P-последовательностью для произвольной функции $f : D \to \Omega$, если для любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_\nu}\}$ и любого $\varepsilon > 0$ функция $f(z)$ принимает в объединении неэвклидовых кругов $D(z_{n_\nu}, \varepsilon) = \{z \in D; \sigma(z, z_{n_\nu}) < \varepsilon\}$ бесконечно часто каждое значение $\omega \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений.

Пусть f - произвольная функция $f : D \to \Omega$ и A - произвольное конечное множество неотрицательных чисел. Жорданову кривую K_ξ, лежащую в круге D и оканчивающуюся в точке $\xi \in \Gamma$, назовем линией Жюлиа для функции $f(z)$, если при любом $\varepsilon > 0$ на множестве

$$D(K_\xi, \varepsilon) = \bigcup_{\alpha \in K_\xi} D(\alpha, \varepsilon)$$

функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое значение $\omega \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $J_A(f)$ и назовем точкой Жюлиа [5], если любой q-путь $L(\xi, q), q \in A$ является линией Жюлиа для $f(z)$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству точек Плеснера $I_A(f)$, если для любого (q_1, q_2) - угла $\Delta(\xi, q_1, q_2), q_1, q_2 \in A$ имеем

$$C(f, \xi, \Delta(\xi, q_1, q_2)) = \Omega .$$

Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $I^*_A(f)$, если каждый q-путь $L(\xi,q)$, $q \in A$ не содержит ни одной P-последовательности функции $f(z)$ и для любого q-пути $L(\xi,q), q \in A$ имеем $C(f,\xi,L(\xi,q)) = \Omega$. Ясно, что для произвольной функции $f(z): D \to \Omega$ множества $J_A(f)$ и $I^*_A(f)$ являются подмножествами множества $I_A(f)$.

Произвольная функция $f: D \to \Omega$ называется нормальной в D, если она образует нормальное (в смысле Монтеля [1]) семейство $\{f(S(z))\}$, где $S(z)$ обозначает произвольное конформное отображение круга D на себя. Если $f(z)$ - нормальная функция в круге D, то семейство функции $\{f_\alpha(z)\}$:

$$f_\alpha(z) = f\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{a}z}\right), \ \alpha \in D, \tag{1}$$

в котором α пробегает все точки круга D, является нормальным в смысле Монтеля в D. Носиро [2] называет функцию $f(z)$ нормальной функцией первого рода, если все предельные функции семейства (1) отличны от тождественных постоянных.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Для произвольной эквиморфной и нормальной первого рода функции f, определенной в круге D, $f: D \to \Omega$, и для произвольного конечного множества A неотрицательных чисел множество $J_A(f)$ является подмножеством множества $I^*_A(f)$.

Доказательство. Пусть $\xi \in \Gamma$ - произвольная точка из $J_A(f)$ и $L(\xi,q), q \in A$ - произвольный фиксированный q-путь. Согласно лемме 1 из [6], для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой (q,q)-угол $\Delta(\xi,q,q)$ и такое $\delta, 0 < \delta < \frac{1}{2}$, что

$$L(\xi,q) \subset \{z; |z-\xi| < \delta\} \subset \Delta(\xi,q,q) \subset \{z \in D; \sigma(z; L(\xi,q)) < \varepsilon\}.$$

Так как $\xi \in J_A(f)$, то в (q,q)-углу $\Delta(\xi,q,q)$ функция $f(z)$ принимает каждое значение $\omega \in \Omega$ бесконечно часто, кроме, быть может, двух значений. Следовательно, функция $f(z)$ на множестве $\{z \in D; \sigma(z; L(\xi,q)) < \varepsilon\}$ принимает бесконечно часто каждое значение $\omega \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений, т.е. q-путь $L(\xi,q)$ является линией Жюлиа для $f(z)$. Тогда имеем $C(f,\xi,L(\xi,q)) = \Omega$. С другой стороны, каждый q-путь $L(\xi,q), q \in A$ не может содержать ни одной P - последовательности, так как нормальная эквиморфная функция в D не имеет P - последовательностей (см. [3], теорема 3). Следовательно, $\xi \in I^*_A\left(f\right)$, и теорема доказана.

Отметим, что в случае, когда $A = \left\{0\right\}$ и f - мероморфная функция в D, теорема доказана в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Lehto O., Virtanen K. I. *Boundary behavior and normal meromorphic functions//* Acta math.- 1957.- V. 97, N 1-2.- P. 47-65.
2. Noshiro K. *Contributions to the theory of meromorphic functions in the unit circle //* J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.- 1938.- V. 7.- P. 149-159.
3. Мехия Х. Э. *Граничные свойства эквиморфных функций //* ДАН СССР.- 1982.- Т. 265, N 1.- С. 35-38.
4. Гаврилов В. И. *Об одной теореме Картрайт и Коллингвуда, касающейся классификации и распределения особенностей мероморфных функций на границе //* Вестник МГУ.- 1976.- N 4.- С. 36-43.
5. Ефремович В. А. *Геометрия близости //* Матем. сб.- 1952.- Т. 31 (73), N 1.- С. 189-200.
6. Мирзоян М. М. *О теоремах максимальности для произвольных и мероморфных функций по касательным направлениям //* ДАН АрмССР.- 1978.- Т. 66, N 4.- С. 200-204.

Материал поступил в редакцию 09.02.2016.

ԺՅՈՒԼԻԱՅԻ ԿԵՏԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆՈՐՄԱԼ ԵՎ ԷԿՎԻՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻԱՎՈՐ ՇՐՋԱՆՈՒՄ ՇՈՇԱՓՈՂ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ

Մ.Մ. Միրզոյան, Ա.Ն. Հայրապետյան

Միավոր շրջանում նորմալ [1], [2] և էկվիմորֆ [3] ֆունկցիաների համար ապացուցվում է թեորեմ Ժուլիայի [4] կետերի բազմության վերաբերյալ:

Առանցքային բառեր. սահմանային բազմություններ, նորմալ էկվիմորֆ ֆունկցիաներ, Ժյուլիայի կետերի բազմություն:

OF THE SET OF JULIA'S POINTS FOR NORMAL AND EQUIMORPHIC FUNCTIONS IN THE UNIT DISC ALONG TANGENTIAL DIRECTIONS

M.M. Mirzoyan, A.N. Hayrapetyan

For normal [1] and equimorphic [3] functions in the unit disc it is proven theorem of Julias points $J_A\left(f\right)$ [4].

Keywords: cluster sets, normal equimorphic functions, Julia's points.

УДК 517.7.53

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАДИУСЕ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ НА СЧЕТНЫХ ГРУППАХ

С.М. Нариманян, Т.З. Хачикян
(Ереванский государственный университет)

Приведен ряд условий, обеспечивающих равенство спектрального радиуса единице для симметричных случайных блужданий на счетных группах.

Ключевые слова: случайное блуждание, спектральный радиус, аменабельная группа, нильпотентная группа, разрешимая группа.

1°. Пусть X_n - однородная марковская цепь со счетным фазовым пространством E и n-шаговыми переходными вероятностями $p(n,x,y)$, $x,y \in E$. В дальнейшем всюду предполагается, что рассматриваемые цепи неприводимы и непериодичны. Для таких цепей известно, что найдется такое n_0, что при $n > n_0$ $p(n,x,x) > 0$, $x \in E$ (см. [1]).

Теорема 1. Если цепь X_n неприводима и непериодична, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n,x,y)}$ и не зависит от x и y.

Обратную величину этого предела обозначим через ρ и назовем спектральным радиусом цепи X_n.

Доказательство. Из уравнения Колмогорова-Чепмена следует, что для любого $x \in E$:

$$p(m+n,x,x) \geq p(m,x,x)\,p(n,x,x).$$

Теперь воспользуемся следующей известной задачей из математического анализа (см. [2]): пусть числовая последовательность a_n $(n=1,2,\ldots)$ удовлетворяет условию

$$0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n \quad (m,n=1,2,\ldots).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$ существует.

Отсюда, учитывая вышеуказанное неравенство, немедленно получим, что

$$\sqrt[n]{p(n,x,x)} \to A(x),\ n \to \infty.$$

Если m фиксирована, то $\sqrt[n]{p(m+n,x,x)} \to A(x)$, $n \to \infty$. Из неприводимости цепи X_n следует, что существуют такие m и s, что $p(m,x,y) > 0, p(s,y,x) > 0$. Ясно, что

$$p\left(m+n+s,x,x\right)\geq p\left(m,x,y\right)\cdot p\left(n,y,y\right)\cdot p\left(s,y,x\right).$$

Извлечем n-й корень из обеих частей последнего неравенства и совершим предельный переход при $n\to\infty$. Тогда получим, что $A\left(x\right)\geq A\left(y\right)$. Но совершенно аналогично можно показать, что $A\left(y\right)\geq A\left(x\right)$. Таким Образом, мы получили, что для любых $x,y\in E$ $A\left(x\right)=A\left(y\right)$. Следовательно, $A\left(x\right)=A=const$. Теперь докажем, что для любых $x,y\in E$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}=A.$$

Действительно, выберем такое m, что $p\left(m,x,y\right)>0,$ и запишем очевидное неравенство:

$$p\left(n,x,y\right)\geq p\left(m,x,y\right)\cdot p\left(n-m,y,y\right).$$

Тогда

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}\geq A.$$

Теперь выберем такое s, что $p\left(s,y,x\right)>0$, и запишем очевидное неравенство:

$$p\left(n+s,x,x\right)\geq p\left(n,x,y\right)\cdot p\left(s,y,x\right).$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}\leq A.$$

Таким образом, мы получили, что

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}=\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}=A.$$

А это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}=A.$$

2°. Начиная с этого момента будем считать, что множество состояний E цепи X_n является группой с единицей e. Если переходные вероятности удовлетворяют условию $p\left(x,y\right)=p\left(e,x^{-1}y\right)$ (тогда, конечно, $p\left(gx,gy\right)=p\left(x,y\right)$ для любого $g\in E$), то говорят, что цепь X_n инвариантна слева. Инвариантные марковские цепи с фазовым пространством E будем называть случайными блужданиями на группе E. Случайное блуждание называется симметричным, если $p\left(e,x\right)=p\left(e,x^{-1}\right)$ для любого $x\in E$. Дадим такое определение (см. [3]).

Определение. Группа E называется аменабельной, если для любого симметричного случайного блуждания на E его спектральный радиус $\rho=1$.

Приведем ряд условий, обеспечивающих равенство $\rho=1$ для симметричных блужданий, заданных на счетных группах.

Лемма 1. Пусть $E = \left\{x_1, x_2, \ldots\right\}$ - счетная группа. Если всякая подгруппа $E_n \subset E$, порожденная множеством $\left\{x_1, x_2, \ldots, x_n\right\}$, аменабельна, то группа E аменабельна.

Действительно, пусть $p\left(e, x\right)$ - переходные вероятности некоторого симметричного блуждания X_n на E и $\varepsilon > 0$. Применим метод урезания: выберем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таким образом, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(e, x_i^{\pm 1}\right) = 1 - \varepsilon_1 > 1 - \varepsilon,$$

и рассмотрим случайное блуждание Y_n на E_n с переходными вероятностями

$$q\left(e, x_i^{\pm 1}\right) = \left(1 - \varepsilon_1\right)^{-1} p\left(e, x_i^{\pm 1}\right).$$

Заметим, что

$$p\left(n, e, e\right) \geq \left(1 - \varepsilon_1\right)^n q\left(n, e, e\right).$$

Отсюда, учитывая, что Y_n - симметричное случайное блуждание на аменабельной группе E_n, получим

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{p\left(n, e, e\right)} \geq \left(1 - \varepsilon_1\right) \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{q\left(n, e, e\right)} = 1 - \varepsilon_1 > 1 - \varepsilon.$$

Теперь, в силу произвольности ε, спектральный радиус цепи X_n равен 1, т.е. E - аменабельная группа.

Лемма 2. Если для любого финитного симметричного случайного блуждания на группе E его спектральный радиус равен 1, то это верно и для любого (необязательно финитного) симметричного случайного блуждания на E.

Доказательство можно провести методом урезания, подобно лемме 1.

Леммы 1 и 2 сводят задачу об общих симметричных случайных блужданиях на произвольных счетных группах к случаю финитных симметричных блужданий и групп с конечным числом образующих.

Пусть теперь E - группа с конечным числом образующих: $a_1, a_2, \ldots, a_v$. Тогда любой элемент $g \in E$ можно представить в виде

$$g = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \ldots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k},\ \varepsilon_i = \pm 1, 1 \leq \alpha_i \leq v.$$

Обозначим через $N_E\left(n\right)$ число элементов группы E, представимых в вышеуказанном виде словами длины не более n. Функция $N_E\left(n\right)$ называется функцией роста группы E. Заметим, что

$$N_E\left(n + m\right) \leq N_E\left(n\right) \cdot N_E\left(m\right),$$

и поэтому, используя упомянутую в пункте 1 известную задачу из математического анализа, получим, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{N_E\left(n\right)} = r\left(E\right)\geq 1,$$

$r\left(E\right)$ называется спектральным показателем группы E.

Лемма 3. Если спектральный показатель $r\left(E\right)=1$, то группа E аменабельна.

Действительно, пусть X_n - некоторое симметричное случайное блуждание на группе E. В силу леммы 2, можно считать, что X_n - финитное случайное блуждание. Тогда имеем

$$p\left(2n,e,e\right)=\sum_{\left|x\right|\leq cn} p\left(n,e,x\right)p\left(n,x,e\right)=$$

$$=\sum_{\left|x\right|\leq cn}\left(p\left(n,e,x\right)\right)^2 \geq \frac{1}{\sum\limits_{\left|x\right|\leq cn} 1}\left(\sum_{\left|x\right|\leq cn}\left(p\left(n,e,x\right)\right)\right)^2 = \frac{1}{N_E\left(cn\right)}.$$

Здесь $\left|x\right|$ - длина элемента x, а $c>0$ - некоторая константа. Отсюда следует, что спектральный радиус случайного блуждания X_n равен 1. Значит, группа E аменабельна.

Следствие. Счетные абелевы группы аменабельны.

В самом деле, в силу леммы 1, можно ограничиться группами с конечным числом образующих. Но если E-абелева группа и $a_1,a_2,\ldots,a_v$ - ее образующие, то $N_E\left(n\right)\leq\left(2n\right)^v$. Остается сослаться на лемму 3.

Лемма 4. Если H - аменабельный нормальный делитель группы E и фактор-группа $E\,/\,H$ аменабельна, то группа E аменабельна.

Доказательство. Пусть X_n - некоторое симметричное случайное блуждание на E. В силу аменабельности фактор - группы $E\,/\,H$, имеем: для любого $\varepsilon>0$

$$p\left(n,e,H\right)\geq\left(1-\varepsilon\right)^n$$

для достаточно больших n. Здесь

$$p\left(n,e,H\right)=\sum_{h\in H}p\left(n,e,h\right).$$

Пусть n_0 - одно из таких чисел и $X_{n_0}\in H$. Если Q - условное распределение на H при условии, что $X_{n_0}\in H$, то Q является симметричным респределением и

$$p\left(kn_0,e,e\right)\geq\left(1-\varepsilon\right)^{kn_0} q\left(k,e,e\right).$$

Отсюда, в силу аменабельности нормального делителя $H,$ получим

$$\sqrt[kn_0]{p\left(kn_0,e,e\right)}\to 1, k\to\infty.$$

Таким образом, по подпоследовательности $\left\{kn_0\right\}$ последовательность $\sqrt[n]{p\left(n,e,e\right)}$ имеет предел, равный 1. Значит, она стремится к 1 (так как предел самой последовательности существует).

Следствие. Счетные нильпотентные и разрешимые группы аменабельны.

Действительно, поскольку нильпотентная группа является также разрешимой, то достаточно доказать аменабельность разрешимых групп. Пусть E - разрешимая группа ранга n. Доказательство проведем индукцией по n. Если $n=1$, то E является абелевой группой. Значит, в силу следствия леммы 3, группа E аменабельна. Предположим, что для всех $k<n$ утверждение леммы верно, и докажем его для n. Заметим, что коммутант группы E является разрешимой группой ранга $n-1$, а фактор-группа по коммутанту есть абелева группа. Остается применить лемму 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А. В. *Введение теории случайных процессов.*- М.: Наука, 1977.
2. Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа, Том.1.*- М.: Наука, 1978.
3. Нариманян С.М. *Некоторые эргодические теоремы для цепей Маркова и случайных последовательностей:* Автореф. дис. канд. физ.-мат. Наук// МГУ.- М, 1980.

Материал поступил в редакцию 17.03.2016.

ՀԱՇՎԵԼԻ ԽՄԲԵՐԻ ՎՐԱ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԹԱՓԱՌՈՒՄՆԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՇԱՌԱՎՂԻ ՄԱՍԻՆ

Ս.Մ. Նարիմանյան, Տ.Զ. Խաչիկյան

Ներկայացված են մի շարք պայմաններ, որոնց առկայության դեպքում հաշվելի խմբերի վրա սիմետրիկ պատահական թափառումների սպեկտրալ շառավիղը հավասար է մեկի:

Առանցքային բառեր. պատահական թափառում, սպեկտրալ շառավիղ, ամենաբելային խումբ, նիլպոտենտ խումբ, թույլատրելի խումբ:

ON SPECTRAL RADIUS OF RANDOM WALKS ON COUNTABLE GROUPS

S.M. Narimanyan, T.Z. Khachikyan

For symmetric random walks on countable groups sufficient conditions for equality of the spectral radius of unit are obtained.

Keywords: random walk, spectral radius, amenable group, nilpotent group, permissible group.

УДК 517.7.53

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВУХ КЛАССОВ НОРМАЛЬНО ПЛОСКИХ РИЧЧИ-ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Р. Назарян

(Национальный политехнический университет Армении**)**

E-mail: aram.nazaryan@gmail.com

Даётся геометрическое описание нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два с двумя ненулевыми собственными значениями тензора Риччи в евклидовых пространствах. Рассматриваются нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия с одним регулярным и одним ненулевым сингулярным главными векторами кривизны.

Ключевые слова: риччи-полусимметрические подмногообразия, прямые произведения, цилиндры и конусы над римановыми многообразиями.

1°. Введение. Пусть M – риманово многообразие с тензором Риччи R_1 и операторами кривизны $R(X,Y)$, где X,Y – произвольные векторные поля на M. Если $R(X,Y)R_1 = 0$ для любых $X,Y,$ то тензор R_1 называется полупараллельным, а само многообразие M называется риччи-полупараллельным или риччи-полусимметрическим. Риччи-полусимметрические многообразия являются естественными обобщениями симметрических, эйнштейновых, полусимметрических многообразий и римановых многообразий с параллельным тензором Риччи (см. [1-3] и цитированную в них литературу). Общая классификация римановых риччи-полусимметрических многообразий была получена в [2]. В теории риччи-полусимметрических многообразий и их изометрических погружений одной из актуальных задач является задача их геометрического описания. Различные классы риччи-полусимметрических подмногообразий были исследованы в [3-10].

Настоящая работа посвящена исследованию и геометрическому описанию двух классов нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два.

2°. Риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два с двумя ненулевыми собственными значениями тензора Риччи. Пусть m -мерное нормально плоское подмногообразие M в E_n является риччи-полусимметрическим и имеет коразмерность $n-m=p=2$ и пусть $W^{(0)},W^{(1)},W^{(2)}$ – группы г.в.к., которые отвечают различным собственным значениям тензора Риччи R_1 (определение групп

$W^{(\sigma)}$ см. в [8,9]). Известно [8], что ни одна из групп $W^{(1)}, W^{(2)}$ не может содержать однократного вектора, ортогонального остальным векторам этой же группы.

Пусть число ненулевых собственных значений $\rho_1, \ldots, \rho_t$ тензора R_1 равно коразмерности подмногообразия, т.е. $t = 2$. Тогда группа $W^{(0)}$, отвечающая нулевому собственному значению тензора Риччи R_1, может состоять только из нулевого г.в.к., и, следовательно, $i_S = \mu - \nu = 0$, где i_S обозначает индекс сингулярности. Каждая из групп $W^{(1)}, W^{(2)}$ содержит либо только один кратный вектор, либо два коллинеарных вектора (см. [8,9]), которые также могут иметь кратности. Пусть группы $W^{(1)}, W^{(2)}$ отвечают собственным значениям ρ_1, ρ_2 тензора Риччи R_1 (на основании вышесказанного, собственные значения ρ_1, ρ_2 должны иметь кратности два и более). Тогда соответствующие собственные подпространства $\Delta_1(x), \Delta_2(x)$ тензора R_1 будут инвариантны относительно операторов кривизны $R(X,Y)$ (подробности см. в [2,10]). Продолжая подпространства $\Delta_1(x), \Delta_2(x)$ методом З. Сабо [11] (процедура подробно описана в [2] при доказательстве теоремы 3.1), можем построить параллельные распределения $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2$ такие, что $\Delta_1(x) \subseteq \tilde{\Delta}_1(x), \Delta_2(x) \subseteq \tilde{\Delta}_2(x)$ (здесь важно отметить, что расширение подпространств $\Delta_1(x), \Delta_2(x)$ происходит только за счёт $T_x^{(0)}$, которое в настоящем случае совпадает с собственным подпространством тензора Риччи R_1, соответствующим нулевому собственному значению). Покажем, что распределения $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2. Действительно, в [5] в ходе доказательства теоремы 2.5 было доказано, что если распределение дефектности $T^{(0)}$ нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия является омбилическим относительно любого нормального векторного поля, то распределения $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2$ сопряжены относительно формы α_2. Поскольку в рассматриваемом случае $\mu = \nu$, то подпространство $T_x^{(0)}$ в каждой точке $x \in M$ совпадает с T'_x, и указанное выше условие омбиличности $T^{(0)}$ относительно любого нормального векторного поля выполняется. Таким образом, распределения $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2$ параллельны в римановой связности на M и сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2. Следовательно, согласно критерию приводимости (см. [1,5]), подмногообразие M разлагается в общем случае в прямое произведение двух риччи-полусимметрических гиперповерхностей и некоторой плоскости (которая представляет собой оставшуюся часть от $T_x^{(0)}$). Разумеется, что структура этого произведения существенно зависит от размерности распределения $T^{(0)}$. Например, если

$\mu = \nu = 0$, то распределения Δ_1, Δ_2 будут совпадать соответственно с распределениями $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2$. В этом случае подмногообразие M разлагается в прямое произведение двух эйнштейновых (но не риччи-плоских) гиперповерхностей.

Итак, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием коразмерности $p = 2$ евклидова пространства E_n. Если число различных ненулевых собственных значений тензора Риччи равно коразмерности, т.е. двум, то их кратности ≥ 2, индексы дефектности и относительной дефектности совпадают, а само подмногообразие M разлагается в прямое произведение двух риччи-полусимметрических гиперповерхностей и некоторой плоскости (возможно, нулевой размерности).

В евклидовых пространствах *риччи*-полусимметрические гиперповерхности геометрически описываются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2 $([3])$. В евклидовом пространстве E_{m+1} гиперповерхность M удовлетворяет условию $R(X,Y)R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда она является открытой частью одного из следующих подмногообразий:

(а) гиперсферы S^m в E_{m+1};

(б) гиперконуса вращения C^m в E_{m+1};

(в) произведения $S^n \times E_{m-n}$, где S^n - гиперсфера в E_{n+1}, а E_{m-n}– $(m-n)$-мерная плоскость, $n = 2,\ldots,m-1$;

(г) произведения $C^n \times E_{m-n}$, где C^n - гиперконус вращения в E_{n+1}, а E_{m-n}– $(m-n)$- мерная плоскость, $n = 2,\ldots,m-1$;

(д) гиперповерхности ранга ≤ 2;

(е) полуэйнштейновой гиперповерхности K^m в E_{m+1}, $m \geq 5$, которая несет ортогональную сопряженную систему, состоящую из двух сфер: $S^p\left(r_1\right)$, $p \geq 2$ и $S^q\left(r_2\right)$, $q \geq 2$ и прямой L, и представляет собой конус с (прямая L в качестве образующей) над прямым произведением $S^p\left(r_1\right) \times S^q\left(r_2\right)$, которое является эйнштейновым подмногообразием в E_{m+1} и принадлежит гиперсфере $S^m\left(r\right) \subset E_{m+1}$;

(ж) произведения $K^n \times E_{m-n}$, где K^n – полуэйнштейнова гиперповерхность в E_{n+1}, описываемая, как и K^m, в п. (е), а E_{m-n}– $(m-n)$ - мерная плоскость, $n = 5,\ldots,m-1$.

Эта теорема дает полную локальную классификацию риччи-полусимметрических гиперповерхностей в евклидовых пространствах. Некоторые уточнения и дополнения к доказательству были сделаны в [6].

Размерность подмногообразия M, удовлетворяющего условиям теоремы 1, очевидно, ≥ 4, причём если $\dim M = 4$, то $\mu = \nu = 0$. Руководствуясь теоремами 1 и

2, приведём геометрическое описание и классификацию, в зависимости от размерности, некоторых классов подмногообразий, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Через m будем обозначать размерность M, а через n – размерность объемлющего евклидова пространства, как и выше.

1. Если $m=4$, $n=6$, то M является открытой частью одного из следующих подмногообразий: прямого произведения $S^2(r_1)\times S^2(r_2)$ двух двумерных гиперсфер, или прямого произведения $M_2\times N_2$ двух поверхностей с ненулевыми гауссовыми кривизнами в трехмерных евклидовых пространствах, или прямого произведения $S^2(r)\times N_2$ двумерной гиперсферы и поверхности ненулевой гауссовой кривизны трехмерного евклидова пространства. В этом случае подмногообразие M имеет нулевой индекс дефектности.

2. Если $m=5$, $n=7$, то M является открытой частью одного из следующих подмногообразий: $S^2(r_1)\times S^3(r_2)$, $S^3(r)\times M_2$, $S^2(r_1)\times C^3$, $S^2(r_1)\times S^2(r_2)\times L_1$, $N_2\times C^3$, $M_2\times N_3$, $M_2\times N_2\times L_1$, $S^2(r)\times N_2\times L_1$, $S^2(r)\times N_3$, где L_1 – прямая; M_2, N_2 – поверхности ненулевой гауссовой кривизны трехмерных евклидовых пространств; N_3 – гиперповерхность ранга два четырёхмерного евклидова пространства; C^3 – гиперконус вращения, а остальные сомножители являются гиперсферами. Здесь в первых двух случаях подмногообразия имеют нулевой индекс дефектности, в остальных случаях индекс относительной дефектности, а следовательно, и индекс дефектности, равны единице.

3. Если $m=6$, $n=8$, то M является открытой частью одного из следующих подмногообразий: $S^2(r_1)\times S^4(r_2)$, $S^4(r)\times N_2$, $S^3(r_1)\times S^3(r_2)$, $S^2(r_1)\times S^3(r_2)\times L_1$, $S^2(r_1)\times S^2(r_2)\times L_2$, $S^2(r_1)\times C^4$, $S^3(r_1)\times C^3$, $S^2(r_1)\times C^3\times L_1$, $S^2(r_1)\times N_4$, $S^2(r_1)\times N_3\times L_1$, $S^2(r_1)\times N_2\times L_2$, $M_3\times N_3$, $M_2\times N_4$, $M_2\times N_2\times L_2$, $N_2\times C^4$, $N_3\times C^3$, $N_2\times C^3\times L_1$, $M_2\times N_3\times L_1$, где L_1 – прямая; L_2 – двумерная плоскость; M_2, N_2 – поверхности ненулевой гауссовой кривизны; M_3, N_3, N_4 – гиперповерхности ранга два; C^3, C^4 – гиперконусы вращения, а остальные сомножители являются гиперсферами. В первых трёх случаях подмногообразия имеют нулевой индекс дефектности, в остальных случаях индекс относительной дефектности, а следовательно, и индекс дефектности, равны единице или двум.

4. Если $m=7$, $n=9$, то M является открытой частью одного из следующих подмногообразий: $S^2(r_1)\times S^5(r_2)$, $S^2(r_1)\times S^4(r_2)\times L_1$, $S^2(r_1)\times S^2(r_2)\times L_3$, $S^2(r_1)\times S^3(r_2)\times L_2$, $S^2(r_1)\times M_5$, $S^2(r_1)\times C^5$, $S^2(r_1)\times C^4\times L_1$, $S^2(r_1)\times C^3\times L_2$, $S^2(r_1)\times K^5$, $S^3(r_1)\times S^4(r_2)$, $S^3(r_1)\times S^3(r_2)\times L_1$, $S^3(r)\times C^4$, $S^3(r_1)\times C^3\times L_1$, $S^3(r)\times M_4$, $S^4(r)\times C^3$, $S^4(r)\times N_3$, $N_4\times C^3$, $N_3\times C^4$, $C^3\times C^3\times L_1$, $M_2\times S^5(r)$, $M_2\times S^4(r)\times L_1$,

$M_2 \times S^3(r) \times L_2$, $M_2 \times S^2(r) \times L_3$, $M_2 \times N_5$, $M_3 \times N_4$, $M_2 \times C^5$, $M_2 \times C^4 \times L_1$, $M_2 \times C^3 \times L_2$, $M_2 \times N_2 \times L_3$, $M_2 \times K^5$, где L_1 – прямая, L_2, L_3 – двумерная и трёхмерная плоскости; C^3, C^4, C^5 – гиперконусы вращения; M_2, N_2 – поверхности ненулевой гауссовой кривизны в E_3; $M_3, M_4, M_5, N_3, N_4, N_5$ – гиперповерхности ранга два, а K^5 – пятимерная полуэйнштейнова гиперповерхность в E_6, описываемая, как и в пункте (e) теоремы 2.

Отметим, что в случае $m = 10$, $n = 12$ подмногообразие M локально может иметь вид произведения $K^5_{(1)} \times K^5_{(2)}$ двух гиперповерхностей, описываемых как и в пункте (e) теоремы 2.

3°. Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условию $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$. Пусть в евклидовом пространстве E_n тензор Риччи m-мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M коразмерности два имеет только одно ненулевое собственное значение. Тогда M допускает или только одну группу главных векторов кривизны (г.в.к.) $W^{(1)}$, или только две группы г.в.к. $W^{(0)}$ и $W^{(1)}$, которые соответствуют нулевому и ненулевому собственным значениям тензора Риччи. (Определение групп $W^{(t)}$ приведено, например, в [7-9]). В первом случае подмногообразие M является эйнштейновым (но не риччи-плоским), а во втором случае оно имеет более сложную структуру. Поскольку $n - m = 2$, то неравенства (2.7) и (4.7) статьи [8] принимают следующий вид:

$$0 \le \mu - \nu + k \le 2, \qquad 0 \le \mu - \nu + i_R \le 2,$$

где i_R обозначает индекс регулярности $\mu - \nu = i_S$ – индекс сингулярности, а k – число подпространств в пространстве кодефектности $T^{(1)}_x$ подмногообразия, инвариантных относительно операторов кривизны $R(X,Y)$. Из второго неравенства следует, что необходимо рассмотреть всего три случая:

(a) $i_R = 1$, $\mu = \nu$, (b) $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$, (c) $i_R = 2$, $\mu = \nu$.

Очевидно, что в случаях (a) и (c) $k = 1$ или $k = 2$, а в случае (b) - $k = 1$.

В случае (b) условие $i_R = 1$, как и выше, означает, что размерность линейной оболочки векторов группы $W^{(1)}$ равна 1, т.е. в $W^{(1)}$ все векторы коллинеарны, и, как мы знаем, они отвечают единственному ненулевому собственному значению тензора Риччи. Условие $\mu = \nu + 1$ означает, что группа $W^{(0)}$ содержит только один ненулевой сингулярный г.в.к. и, возможно, нулевой г.в.к. Отметим, что группа $W^{(0)}$ не может содержать регулярные г.в.к. Поскольку гиперповерхности, не являющиеся локально евклидовыми, удовлетворяют условию $\mu = \nu$ (см. [8]), то в рассматриваемом случае подмногообразие M не является гиперповерхностью. Здесь необходимо рассмотреть два случая:

(b_1) группа $W^{(1)}$ состоит из одного регулярного г.в.к. n_1, имеющего кратность ≥ 2;

(b_2) группа $W^{(1)}$ состоит из двух коллинеарных регулярных г.в.к. n_1, n_2.

Здесь мы рассмотрим только случай (b_1). Пусть m-мерное нормально плоское подмногообразие M евклидова пространства E_{m+2} допускает только одну группу $W^{(1)}$ регулярных г.в.к., состоящую только из одного вектора n_1 кратности $p \geq 2$. Поскольку $\mu = \nu + 1$, то M допускает только один ненулевой сингулярный г.в.к. n_2. Как нам известно, кратность n_2 равна единице и $n_2 \perp n_1$ (см. [8]). Пусть $T_x^{(n_1)}$ и $T_x^{(n_2)}$ обозначают собственные подпространства, сответствующие векторам n_1 и n_2 соответственно. В рассматриваемом случае в каждой точке $x \in M$ фактически $T_x^{(0)} = T_x^{(n_2)} \oplus T_x'$, где T_x' – пространство относительной дефектности, а пространство кодефектности $T_x^{(1)}$ совпадает с $T_x^{(n_1)}$. Пространство T_x' соответствует нулевому г.в.к. Поскольку по построению $\dim T_x^{(n_1)} = p$, $\dim T_x^{(n_2)} = 1$, то $\nu = \dim T_x' = m - p - 1$.

В последующем, в целях упрощения вычислений и геометрического описания подмногообразия M, ортонормированный репер $\{x_1, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2}\}$ адаптируем следующим образом:

$$e_1, \ldots, e_p \in T_x^{(n_1)}, \ e_{p+1} \in T_x^{(n_2)}, \ e_{p+2}, \ldots, e_m \in T_x', \ e_{m+1}, e_{m+2} \in T_x^{\perp}(M).$$

В дальнейшем индексы будут принимать следующие значения: $i, j, k = 1, \ldots, m$, $a, b, c = 1, \ldots, p$, $u, v, w = p+1, \ldots, m$, $\alpha, \beta = m+1, \ m+2$.

Поскольку нормальная связность плоская, то в некотором ортонормированном репере все матрицы $\|h_{ij}^{\alpha}\|$ второй фундаментальной формы α_2 могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^{\alpha} \delta_{ij}\|$. Тогда $n_1 = \lambda_a^{\alpha} e_{\alpha}$, $n_2 = \lambda_{p+1}^{\alpha} e_{\alpha}$, причем $\lambda_a^{\alpha} = \lambda_b^{\alpha}$, $a \neq b$ в силу кратности вектора n_1. Так как $n_1 \perp n_2$, то векторы e_{m+1}, e_{m+2} можем выбрать коллинеарно векторам n_1 и n_2 соответственно. При таком выборе для векторов n_1, n_2 получим следующие формулы: $n_1 = \lambda_a^{m+1} e_{m+1}$, $n_2 = \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2}$. Следовательно, матрицы $\|h_{ij}^{m+1}\|$, $\|h_{ij}^{m+2}\|$ второй фундаментальной формы подмногообразия M будут иметь соответственно следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_a^{m+1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_a^{m+1} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & \lambda_{p+1}^{m+2} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\lambda_a^{m+1} \neq 0$, $\lambda_{p+1}^{m+2} \neq 0$. Легко показать, что такой вид матриц второй фундаментальной формы α_2 m-мерного подмногообразия M в E_{m+2} в некотором ортонормальном репере с такими же условиями на диагональные элементы является достаточным, чтобы M было нормально плоским подмногообразием с одним регулярным г.в.к. кратности $p \geq 2$, одним ненулевым сингулярным и нулевым г.в.к.

Пусть $\left\{\omega^1, \cdots, \omega^{m+2}\right\}$ – корепер в E_{m+2}, двойственный к выбранному выше адаптированному реперу $\left\{x_1, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2}\right\}$. Тогда на M выполняются следующие соотношения:

$$\omega^\alpha = 0,\ \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j, \tag{1}$$

$$d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + \lambda_i^\beta \delta_{ij} \omega_\beta^\alpha + \left(\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha\right) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \tag{2}$$

где функции h_{ijk}^α симметричны по нижним индексам.

Из (2) при $i = a, j = b, a \neq b$ следует, что $h_{abk}^\alpha = 0$. Если в (2) положить $i = j = a$, а затем $i = j = b,\ a \neq b$, то получим $d\lambda_a^\alpha + \lambda_a^\beta \omega_\beta^\alpha = h_{aak}^\alpha \omega^k$, $d\lambda_b^\alpha + \lambda_b^\beta \omega_\beta^\alpha = h_{bbk}^\alpha \omega^k$. Учитывая, что в этих равенствах левые части равны, и придавая индексу α значения, будем иметь

$$h_{aaa}^\alpha = 0,\ h_{aau}^\alpha = h_{bbu}^\alpha,\ d\lambda_a^{m+1} = h_{aau}^{m+1} \omega^u,\ \ \lambda_a^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{aau}^{m+2} \omega^u.$$

Из (2) при $i = u, j = a$ следует, что $\left(\lambda_a^\alpha - \lambda_u^\alpha\right) \omega_a^u = h_{aua}^\alpha \omega^a + h_{auv}^\alpha \omega^v$. Согласно результату Чженя-Кюйпера $[12]$, формы ω_a^u должны выражаться только через ω^a. Следовательно, $h_{auv}^\alpha = 0$ при любых значениях индексов u, v, и предыдущее равенство сводится к следующему: $\left(\lambda_a^\alpha - \lambda_u^\alpha\right) \omega_a^u = h_{aua}^\alpha \omega^a$. Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$, получаем $\lambda_a^{m+1} \omega_a^u = h_{aau}^{m+1} \omega^a$, $\lambda_u^{m+2} \omega_a^u = -h_{aau}^{m+2} \omega^a$. Из последнего равенства при $u = p+1$ и $u > p+1$ имеем $\lambda_{p+1}^{m+2} \omega_a^{p+1} = -h_{aa(p+1)}^{m+2} \omega^a$, $h_{aau}^{m+2} = 0$.

Пусть в (2) $i = u$, $j = v$, $u, v > p+1$. Поскольку в этом случае $\lambda_u^\alpha = \lambda_v^\alpha = 0$, то $h_{uvk}^\alpha = 0$. Если в (2) положить $i = j = p+1$ и учесть указанный выше результат Чженя-

Кюйпера, то придём к равенству $d\lambda^{\alpha}_{p+1}+\lambda^{\beta}_{p+1}\omega^{\alpha}_{\beta}=h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{u}$. Отсюда при $\alpha=m+1$ и $\alpha=m+2$ получаем $\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{m+1}_{m+2}=h^{m+1}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{u}$, $d\lambda^{m+2}_{p+1}=h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{u}$.

Наконец, полагая в (2) $j=p+1$, $i=u$, $u>p+1$ и учитывая, что $h^{\alpha}_{auv}=0$ при любых значениях индексов u,v, а также $h^{\alpha}_{uvk}=0$ при $u,v>p+1$, приходим к следующему равенству: $\lambda^{\alpha}_{p+1}\omega^{u}_{p+1}=h^{\alpha}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{p+1}$. При $\alpha=m+1$ и $\alpha=m+2$ получаем $h^{m+1}_{(p+1)(p+1)u}=0$, $\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{u}_{p+1}=h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{u}$.

В итоге для компонент тензора h^{α}_{ijk} имеем следующую систему равенств:

$$h^{\alpha}_{abk}=0,\ a\neq b,\ h^{\alpha}_{aaa}=0,\ h^{\alpha}_{aau}=h^{\alpha}_{bbu},\ a\neq b,\ \ h^{\alpha}_{auv}=0,\ \ h^{m+2}_{aau}=0,\ u>p+1,$$

$$h^{\alpha}_{uvk}=0,\ u,v>p+1,\ \ h^{m+1}_{(p+1)(p+1)u}=0,\ u>p+1.$$

Кроме того, на основании проведенных вычислений можем составить следующую дифференциальную систему:

$$d\lambda^{m+1}_{a}=h^{m+1}_{aau}\omega^{u},\ \ \lambda^{m+1}_{a}\omega^{m+2}_{m+1}=h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^{p+1},$$

$$\lambda^{m+1}_{a}\omega^{u}_{a}=h^{m+1}_{aau}\omega^{a},\ \lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{p+1}_{a}=-h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^{a},$$

$$d\lambda^{m+2}_{p+1}=h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{u},\ \ \lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{m+2}_{m+1}=-h^{m+1}_{(p+1)(p+1)(p+1)}\omega^{p+1},$$

$$\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{u}_{p+1}=h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{p+1}, u>p+1.$$

Преобразуя эту систему, получим

$$d\ln\left|\lambda^{m+1}_{a}\right|=A_{u}\omega^{u},\ d\ln\left|\lambda^{m+2}_{p+1}\right|=D_{u}\omega^{u},\ \omega^{u}_{a}=A_{u}\omega^{a},\ \omega^{u}_{p+1}=D_{u}\omega^{p+1},\ \omega^{m+2}_{m+1}=B\omega^{p+1}, \tag{3}$$

где приняты следующие обозначения:

$$A_{u}=\frac{h^{m+1}_{aau}}{\lambda^{m+1}_{a}},\ B=\frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+1}_{a}}=-\frac{h^{m+1}_{(p+1)(p+1)(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}},\ D_{u}=\frac{h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}.$$

Дифференцируя уравнения системы (3) внешним образом, учитывая (1) и применяя лемму Картана, получим

$$dA_{u}-A_{v}\omega^{v}_{u}=A_{u}A_{v}\omega^{v}, \tag{4}$$

$$dD_{u}-D_{v}\omega^{v}_{u}=E_{uv}\omega^{v},\ E_{uv}=E_{vu}, \tag{5}$$

$$dD_{u}-D_{v}\omega^{v}_{u}-D_{u}D_{v}\omega^{v}=F_{u}\omega^{p+1}, \tag{6}$$

$$dB-BD_{u}\omega^{u}=G\omega^{p+1}. \tag{7}$$

Эти условия являются условиями интегрируемости системы (3). Далее, поскольку

$$A_{p+1}=\frac{h^{m+1}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+1}_{a}}=-\frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}=-B\frac{\lambda^{m+1}_{a}}{\lambda^{m+2}_{p+1}},$$

то, дифференцируя соотношение $\lambda^{m+2}_{p+1} A_{p+1} + B\lambda^{m+1}_{a} = 0$ и используя формулы (3), (4), (7), будем иметь $\sum_u A_u D_u = A_{p+1}\dfrac{G}{B}$, $u > p+1$.

Распределение $T^{(n_1)}$ задается дифференциальной системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^u = 0$. Поскольку $\omega^{m+1}_a = \lambda^{m+1}_a \omega^a$, $\omega^{m+2}_a = 0$, $\omega^u_a = A_u \omega^a$, то легко проверить, что $d\omega^\alpha = d\omega^u = 0$. Это значит, что распределение $T^{(n_1)}$ интегрируемо, а его интегральное многообразие, как это видно из выражения для ω^{m+1}_a и ω^u_a, является вполне омбилическим подмногообразием, т.е. сферой размерности p (поскольку $\lambda^{m+1}_a \neq 0$), которую будем обозначать через $S^p(r)$. Сфера $S^p(r)$, будучи гиперсферой, имеет только один г.в.к. $\tilde{n} = \lambda^{m+1}_a e_{m+1} + \sum_u A_u e_u$ кратности p, который является вектором средней кривизны сферы. Следовательно, $r = \left|\tilde{n}\right|^{-1} = ((\lambda^{m+1}_a)^2 + \sum_u A^2_u)^{-1}$.

Поскольку $\omega^\alpha_u = 0$ при $\omega^u = 0$, то $T^\perp(M)$ и $T^{(0)} = T^{(n_2)} + T'$, как подрасслоения нормального расслоения сферы $S^p(r)$, являются параллельными в нормальном расслоении. Следовательно, в этих подрасслоениях индуцируются плоские нормальные связности. Из (4)-(6) следует, что векторные поля $\xi = \sum_u A_u e_u$, $\zeta = \sum_u D_u e_u$ параллельны в нормальном расслоении сферы $S^p(r)$.

Распределение $T^{(n_2)}$ задается дифференциальной системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^a = 0$, $\omega^u = 0$, $u > p+1$. Легко проверить, что $d\omega^\alpha = d\omega^a = d\omega^u = 0$. Следовательно, распределение $T^{(n_2)}$ является интегрируемым. Его интегральное многообразие представляет собой некоторую кривую с единичным касательным вектором e_{p+1} в каждой точке.

Распределение T' задается дифференциальной системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^a = 0$, $\omega^{p+1} = 0$. Непосредственно проверяется, что $d\omega^\alpha = d\omega^a = d\omega^{p+1} = 0$. Следовательно, распределение T' интегрируемо, и поскольку в этом случае $\omega^\alpha_u = 0, u > p+1$, $\omega^\alpha_u = \omega^{p+1}_u = 0$, то его интегральное многообразие представляет собой плоскость размерности ν.

Наконец, распределение $T^{(0)} = T^{(n_2)} + T'$ задается дифференциальной системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^a = 0$. Тогда $d\omega^\alpha = d\omega^a = 0$, и распределение $T^{(0)}$ интегрируемо. Поскольку $\omega^a_u = 0$, то его интегральное многообразие $M^{(0)}(\dim M^{(0)} = \mu)$ является вполне геодезическим в M, а его индекс относительной дефектности равен ν, т.е. $\mu - 1$. Поскольку $\omega^{m+1}_u = 0$, $\omega^a_u = 0$, $\omega^{m+2}_{p+1} = \lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{p+1}$, $\omega^{m+2}_u = 0, u > p+1$, то $M^{(0)}$ является локально евклидовым, т.е. его тензор кривизны равен нулю.

Поскольку распределение $T^{(1)}$ интегрируемо, а его интегральное многообразие, сфера $S^p(r)$, является вполне омбилическим в M, то выполняются условия следующей теоремы.

Теорема 3. ([4]) Пусть $\tilde{M} - n$ -мерное риманово многообразие с индексом дефектности $\mu \neq 0$ и интегрируемым распределением кодефектности $\tilde{T}^{(1)}$, $\dim \tilde{T}^{(1)} = n - \mu \geq 2$. Если его интегральное многообразие $\tilde{M}^{(1)}$ является вполне омбилическим в $\tilde{M}$, то:

1) $\tilde{M}$ локально изометрично либо цилиндру над $\tilde{M}^{(1)}$, либо цилиндру с $(\mu - 1)$-мерными образующими над конусом, построенным над $\tilde{M}^{(1)}$;

2) $\tilde{M}$ полуэйнштейново или риччи-плоское тогда и только тогда, когда $\tilde{M}^{(1)}$ эйнштейново; более того, если $\tilde{M}^{(1)}$ эйнштейново с константой $\lambda \leq 0$, то $\tilde{M}$ полуэйнштейново, если же $\lambda > 0$, то $\tilde{M}$ или полуэйнштейново, или риччи-плоское.

Согласно первой части этой теоремы, подмногообразие M изометрично или цилиндру над сферой $S^p(r)$, или цилиндру над конусом, построенному над сферой $S^p(r)$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием коразмерности два евклидова пространства E_n. Если M допускает только один кратный регулярный и только один ненулевой сингулярный главные векторы кривизны, то оно изометрично или цилиндру над сферой, или цилиндру над конусом, построенному над сферой.

Выражаю искреннюю благодарность профессору В.А. Мирзояну за большую помощь, оказанную мне на протяжении всей работы над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lumiste Ü. *Semiparallel submanifolds in space forms.* -New York: Springer, 2009.-306 p.
2. Мирзоян В.А. *Структурные теоремы для римановых Ric- полусимметрических пространств* // Изв. Вузов. Математика. - 1992. - № 6. - С. 80-89.
3. Мирзоян В.А. *Классификация Ric- полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах* // Матем. сб. – 2000. - 191, № 9. – С. 65-80.
4. Мирзоян В.А. *Скрещенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric-полупараллельных подмногообразий* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2003. - 67, № 5. – С. 107-124.
5. Мирзоян В.А. *Структурные теоремы для Ric-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий* // Матем. сб. – 2006. - 197, № 7. – С. 47-76.
6. Мирзоян В.А. *Классификация одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с интегрируемым распределением кодефектности* // Матем. сб. – 2008. - 199, № 3. – С. 69-94.

7. Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С. *Нормально плоские минимальные полуэйнштейновы подмногообразия с однократными главными векторами кривизны* // Докл. НАН Армении. – 2009. - 109, № 2. – С. 119-125.
8. Мирзоян В.А. *Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах* // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2011. - 75, № 6. – С. 47-78.
9. Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С. *О нормально плоских* $Ric-$*полусимметрических подмногообразиях в евклидовых пространствах* // Изв. вузов. Матем. - 2012. -№ 9. - С.19-31.
10. Mirzoyan V.A. *General classification of normally flat* Ric*-semisymmetric submanifolds* // National Acad. Sci. of Armenia. Reports. – 2012. - 112, № 1. – P. 19-29.
11. Szabo Z.I. *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying* $R(X,Y)\cdot R=0$. *I. The local version* // J. Differential Geom. – 1982. - 17, № 4. – P. 531-582.
12. Chern S.S., Kuiper N. *Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Eudlidean Space* // Ann. of. Math. –1952. -56, № 3. -P. 422-430.

Материал поступил в редакцию 09.12.2015.

ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ ԿՈՉԱՓԱՆԻ ԵՐԿՈՒ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՐԹ ՌԻՉՉԻ-ԿԻՍԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՐԿՈՒ ԴԱՍԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա.Ռ. Նազարյան

Էվկլիդեսյան տարածություններում տրվում է երկու կոչափանի նորմալ հարթ ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը, երբ Ռիչչի տենզորն ունի երկու ոչ զրոյական սեփական արժեք: Դիտարկվում են նաև նորմալ հարթ ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ՝ մեկ ռեգուլյար և մեկ ոչ զրոյական սինգուլյար կորությամբ գլխավոր վեկտորներով:

Առանցքային բառեր. ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ, ուղիղ արտադրյալներ, գլաններ և կոներ ռիմանյան բազմաձևությունների վրա:

GEOMETRIC DESCRIPTION OF TWO CLASSES OF NORMALLI FLAT RICCI-SEMISYMMETRIC SUBMANIFOLDS OF CODIMENSION TWO IN EUCLIDEAN SPACES

A.R. Nazaryan

A geometric description of normally flat Ricci-semisymmetric submanifolds in euclidean space of codimension two with two nonzero eigenvalues of the Ricci tensor is given. Normally flat Ricci semisymmetric submanifolds with one regular and one nonzero singular principal curvature vectors are also considered.

Keywords: Ricci-semisymmetric submanifolds, direct products, cylinders and cones over Riemannian manifolds.

УДК 517.53; 517.572

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ТЕМ В КУРСЕ “КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ”*

С.Л. Берберян

(Российско-Армянский (Славянский) университет)

E-mail: samvel357@mail.ru

Утверждения некоторъх классических теорем, известных для аналитических функций, переносятся с помощью аналитического аппарата на гармонические функции.

Ключевые слова: аналитические, гармонические, субгармонические функции.

При прохождении курса “Комплексный анализ” студентами специальности “Прикладная математика и информатика” изучаются принцип максимального модуля для аналитических функций; теорема Лиувилля для аналитических в комплексной плоскости функций; первая и вторая теоремы Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов, члены которых функции, аналитические в некоторых областях (см. [1-4]). Цель работы показать, как на занятиях по курсу “Комплексный анализ” с помощью аналитического аппарата распространить эти результаты на гармонические функции. На наш взгляд, рассмотрение элементов теории гармонических функций позволит, с одной стороны, глубже усвоить основы теории аналитических функций, а с другой стороны - установить глубокую связь между аналитическими и гармоническими функциями. Как известно, гармонические функции играют важную роль не только в комплексном анализе, но и, в частности, в курсе “Уравнения математической физики”. Вначале рассмотрим вспомогательное утверждение, необходимое для дальнейшего изложения.

Лемма 1. Пусть $u(z)$ - произвольная гармоническая функция, определенная в некоторой области G. Предположим, что $V(z)$ - одна из сопряженных к $u(z)$ - гармонических функций. Тогда функция $f(z) = \exp\{u(z) + iV(z)\}$ - аналитическая в области G.

Доказательство. Из условия леммы 1 непосредственно следует, что известные условия Коши-Римана выполняются для функций $u(z)$ и $V(z)$ в области G, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial V}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}. \end{cases} \tag{1}$$

Всюду в области G и все частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}$ непрерывны в области G. Отсюда легко подсчитать, воспользовавшись условиями (1), что если

* Работа выполнена в рамках программы развития Российско-Армянского (Славянского) университета.

$u_1(z) = Pref(z) = \exp\{u(z)\} \cdot \cos V(z)$ и $V_1(z) = Imf(z) = \exp\{u(z)\} \cdot \sin V(z)$, то условия Коши-Римана выполняются для функций $u_1(z)$ и $V_1(z)$ всюду в области G, причем все частные производные $\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial V_1}{\partial x}, \frac{\partial V_1}{\partial y}$ непрерывны в области G. Поэтому, в силу достаточного условия существования производной у функции $f(z)$, в любой точке области G имеется производная. Отсюда следует утверждение леммы 1.

Детально изучим известные теоремы комплексного анализа для гармонических функций.

1. Принцип максимума и минимума для гармонических функций.

Теорема 1. Пусть $u(z)$- гармоническая функция, отличная от постоянной, определена в области G. Тогда ни в одной точке области G функция $u(z)$ не достигает своего максимального и минимального значений.

Доказательство. Доказательство ведем методом от противного. Предположим, что $u(z)$ в некоторой точке z_0 принимает свое максимальное значение. Допустим, что $V(z)$ - одна из сопряженных к $u(z)$ гармонических функций. Тогда, очевидно, модуль аналитической функции $f(z) = \exp\{u(z) + iV(z)\}$ ограничен и в точке z_0 принимает свое максимальное значение. В силу принципа максимального модуля, для аналитических функций $\left| f(z) \right|$ всюду в области G принимает постоянное значение, а значит, $u(z)$ принимает постоянное значение в области G, что противоречит предположению. Если же $u(z)$ принимает в точке z_0 свое минимальное значение, то $-u(z)$ - гармоническая функция, принимающая в точке z_0 свое максимальное значение. Проведя вышеприведенные рассуждения, снова придем к противоречию. Утверждение теоремы 1 доказано.

После прохождения указанного материала можно ввести понятия полунепрерывных и субгармонических функций. Тем самым расширяется класс действительно-значных функций комплексного переменного, изучаемого студентами. Далее можно без доказательства сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $u(z)$ - субгармоническая функция, отличная от постоянной, определена в области G. Тогда ни в одной точке области G функция $u(z)$ не достигает своего максимального значения.

2. Теорема Лиувилля для гармонических функций.

Теорема 3. Пусть $u(z)$ - гармоническая функция, определенная во всей комплексной плоскости и ограниченная сверху (или снизу). Тогда функция $u(z)$ есть тождественная постоянная.

Доказательство. Предположим, что функция $u(z)$ ограничена сверху. Рассмотрим аналитическую функцию $f(z) = \exp\{u(z) + iV(z)\}$, где $V(z)$ - одна из сопряженных к $u(z)$ гармонических функций. Очевидно, что $\left|f(z)\right| = \exp\{u(z)\}$ будет ограниченной во всей комплексной плоскости. В силу теоремы Лиувилля, для аналитических функций функция $f(z)$ (см. [1]) есть тождественная постоянная.

Поэтому $\left|f(z)\right|$, а значит, $u(z)$ есть тождественная постоянная, что и требовалось доказать.

Для субгармонических функций важно отметить, что справедливо утверждение.

Теорема 4. Пусть $u(z)$ - субгармоническая функция, определенная во всей комплексной плоскости и ограниченная сверху. Тогда функция $u(z)$ есть тождественная постоянная.

4. Первая теорема Вейерштрасса для гармонических функций.

Теорема 5. Пусть дан ряд

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots, \tag{2}$$

все члены которого гармонические в области G функции. Если ряд равномерно сходится внутри области G, то сумма ряда есть гармоническая функция в области G.

Для доказательства теоремы 5 приведем утверждение, равносильное которому доказано, например, в работе [2].

Лемма 2. Пусть дан ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots, \tag{3}$$

члены которого аналитические в области G функции.

Если ряд (2), где $u_n(z) = \operatorname{Re} f_n(z)$, равномерно сходится внутри области G, и, кроме того, ряд (3) сходится в какой-либо точке $z_0 \in G$, то ряд (3) равномерно сходится внутри G.

Доказательство теоремы 5. Для доказательства достаточно рассмотреть произвольную точку $z_0 \in G$ и взять такой круг K_{z_0} с центром в точке z_0 и радиусом, равным расстоянию от z_0 до границы области G. Построим для каждой из заданных гармонических функций $u_n(z)$ гармоническую функцию $V_n(z)$, сопряженную к $u_n(z)$ в указанном круге, причем постоянную интегрирования при определении $V_n(z)$ выберем так, чтобы выполнялось условие $V_n(z_0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Получим последовательность аналитических функций $f_n(z) = u_n(z) + iV_n(z)$. Так как сумма ряда $f_1(z_0) = f_2(z_0) + f_n(z_0) + \ldots$ совпадает с суммой ряда $u_1(z_0) + u_2(z_0) + \ldots + u_n(z_0) + \ldots$, то, согласно утверждению леммы 2, ряд (3) равномерно сходится внутри области G. Поэтому, в силу утверждения первой теоремы Вейерштрасса, для равномерно сходящихся внутри G рядов, члены которых аналитические функции в G, сумма ряда (3) будет аналитической функцией в K_{z_0}. Поэтому $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ есть функция, гармоническая в этом же круге. При этом, очевидно, $u(z)$ представляет собой сумму ряда (2) в круге K_{z_0}. В силу произвольности взятой точки z_0 в области G, получим утверждение теоремы 5.

Перефразируя утверждение теоремы 5, получим следующее утверждение.

Следствие 1. Предел последовательности гармонических функций $\{u_n(z)\}$, равномерно сходящейся внутри области G, есть функция, гармоническая в этой области.

5. Вторая теорема Вейерштрасса для гармонических функций.

Теорема 6. Пусть дан ряд

$$u_1(z)+u_2(z)+...+u_n(z)+..., \tag{4}$$

все члены которого функции, гармонические в области G и непрерывные в замкнутой области $\overline{G}$. Если ряд (4) сходится равномерно на границе области G, то он сходится равномерно во всей замкнутой области G.

Доказательство. Действительно, обозначив через ξ произвольную точку границы области G, из условия равномерной сходимости ряда (4) на границе области следует, что при любом сколь угодно малом $\varepsilon>0$ существует такой номер $N=N(\varepsilon)$, что при $p\geq 1$ справедливо неравенство

$$\left|u_{N+1}(\xi)+u_{N+2}(\xi)+...+u_{N+p}(\xi)\right|<\varepsilon\,. \tag{5}$$

Так как функция $u_{N+1}(z)+u_{N+2}(z)+u_{N+p}(z)$ есть гармоническая функция в области G и непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$, то функция $\left|u_{N+1}(z)+u_{N+2}(z)+u_{N+p}(z)\right|$ есть субгармоническая в области G и непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$. В силу принципа максимума для субгармонических функций, ее максимальное значение не может приниматься в области G, так как субгармоническая функция $\left|u_{N+1}(z)+u_{N+2}(z)+u_{N+p}(z)\right|$ не есть тождественная постоянная. В то же время, так как функция $\left|u_{N+1}(z)+u_{N+2}(z)+u_{N+p}(z)\right|$ - непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$, то она должна принимать свое максимальное значение на границе области G. Поэтому из неравенства (5) следует, что для любой точки $z\in\overline{G}$

$$\left|u_{N+1}(z)+u_{N+2}(z)+...+u_{N+p}(z)\right|<\varepsilon \tag{6}$$

при сколь угодно малом ε, если $N=N(\varepsilon)$ и $p\geq 1$. А это значит, согласно необходимому и достаточному условию равномерной сходимости, что ряд (4) равномерно сходится в замкнутой области $\overline{G}$. Тем самым утверждение теоремы 6 доказано.

Замечание. Анализируя доказательство теоремы 6, можно обратить внимание студентов на то, что мы, по существу, использовали принцип максимума в области $\overline{G}$ и непрерывность функций в замкнутой области $\overline{G}$. Учитывая, что эти два свойства имеют место для непрерывных субгармонических функций, справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть дан ряд (4), все члены которого функции, субгармонические функции в области G и непрерывные в замкнутой области $\overline{G}$. Если ряд (4) сходится равномерно на границе области G, то он сходится равномерно в замкнутой области $\overline{G}$.
Перефразируя утверждение теоремы 6 для последовательности гармонических функций, получим следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть дана последовательность функций $\{u_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, гармонических в области G и непрерывных в замкнутой области $\overline{G}$, которая равномерно сходится на границе области. Тогда эта последовательность равномерно сходится в замкнутой области $\overline{G}$.

Очевидно, что предельная функция $u(z)$, в силу теоремы 5, будет гармонической функцией в области G.

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И.И. *Введение в теорию функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1984. – 432с.
2. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* – М.Л.: ГИТТЛ, 1950. – 701 с.
3. Бицадзе А.В. *Основы теории аналитических функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1984. - 320 с.
4. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* Ч.1 – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Материал поступил в редакцию 09.02.2016.

«ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԱՆԱԼԻԶ» ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ ԱՌԱՆՁԻՆ ԹԵՄԱՆԵՐԻ ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՅԵՑԱԿԵՏԵՐ

Ս.Լ. Բերբերյան

Ուսումնասիրվել են մի քանի հայտնի թեորեմներ հարմոնիկ, սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համար և նրանց կապը անալիտիկ ֆունկցիաների հետ «Կոմպլեքս անալիզ» դասընթացում:

Առանցքային բառեր. անալիտիկ, հարմոնիկ, սուբհարմոնիկ ֆունկցիաներ:

SOME ASPECTS OF A TEACHING OF THE SEVERAL THEMES IN A “COMPLEX ANALYSIS” COURSE

S.L. Berberyan

It was studied some famous theorems for harmonic and subharmonic functions and their connection with analytical functions in a “Complex analysis” course.

Keywords: analytig, harmonic, subharmonic functions.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

★ ★ ★

«Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում» գիտամեթոդական ժողովածուն լուսաբանում է բարձրագույն և հանրակրթական դպրոցում մաթեմատիկայի դասավանդման արդի հիմնահարցերը: Ժողովածուում տպագրվում են հանրապետության բուհերի, հանրակրթական դպրոցների ուսուցիչների, մասնագետների՝ այդ ուղղությամբ կատարած հետազոտությունները, մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառներում ստացված ժամանակակից արդյունքները: Ժողովածուն նախատեսված է ուսանողների, ասպիրանտների, հայցորդների, ուսուցիչների, դասախոսների համար:

Հոդվածները կարող են ներկայացվել հայերեն, ռուսերեն, անգլերեն լեզուներով:

★ ★ ★

Научно-методический сборник «Математика в высшей школе» освещает актуальные вопросы преподавания математики в общеобразовательной и высшей школе. В сборнике печатаются современные результаты, полученные в разных областях математики, а также исследования в этом направлении, сделанные специалистами, преподавателями вузов республики, учителями общеобразовательных школ. Сборник предназначен для студентов, аспирантов, соискателей, учителей, преподавателей вузов.

Статьи могут быть представлены на армянском, русском, английском языках.

★ ★ ★

Guidance collection «Mathematics in high school» covers modern basic questions of teaching mathematics in general educational and high school. Results received nowadays in different fields of mathematics as well as researches in this direction made by specialists, lecturers of Higher Educational Institutions of the republic and teachers of general educational schools are published here. The collection is designed for students, post-graduate students, competitors, teachers, lecturers.

Articles can be submitted in Armenian, Russian, English.

ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՎՈՂ ՊԱՀԱՆՋՆԵՐԸ

Հոդվածները կարելի է ներկայացնել հայերեն, ռուսերեն և անգլերեն լեզուներով: Տեքստի տառատեսակը՝ Sylfaen, տառաչափը՝ 10pt, տողերի հեռավորությունը՝ 1 տող, էջի ֆորմատը՝ A4 (210×297մմ), լուսանցքները. վերևից՝ 5սմ, ներքևից՝ 5,1սմ, ձախից՝ 5,75սմ, աջից՝ 1,75սմ:

Հոդվածի վերնագիրը տրվում է գլխատառերով, մեջտեղում, **bold**, 12pt տառաչափով, իսկ հեղինակի(ների) Ա. Հ. Ազգանունը(ները)՝ փոքրատառերով, միայն սկզբնատառերը՝ մեծատառ, ***bold Italic***, 11pt տառաչափով:

Համառոտագրերը տրվում են երեք լեզուներով, 9pt տառաչափով, 5-6 առանցքային բառերով:

Բոլոր բանաձևերը և մաթեմատիկական արտահայտությունները տրվում են MathType (Euclid10.eqp) կամ Microsoft Equation 4.0, *Italic*, 10pt տառաչափով: Հիմնական բանաձևերը ներկայացվում են առանձին տողով, մեջտեղում և համարակալվում են նույն էջի անկյունում՝ փակագծերի մեջ:

Օգտագործված գրականությունը համարակալվում է ըստ հղումների հերթականության՝ [1],[2],... տեսքով: Հոդվածի ընդհանուր ծավալը չպետք է գերազանցի 10 էջը: Տեքստի վերջում տրվում են հոդվածի ներկայացման ամսաթիվը և տարեթիվը:

Հոդվածը գրախոսվում է:

Վերոհիշյալ պահանջները բավարարող հոդվածը (2 օրինակ) և հոդվածի ֆայլը՝ գրված Microsoft Office Word (*.doc կամ *.docx) ֆորմատով, ներկայացվում է ժողովածուի պատասխանատու քարտուղարին: Խմբագրական խորհուրդն իրավունք ունի վերջնական խմբագրման ենթարկել հոդվածները: Խորհրդի կողմից հրատարակման չերաշխավորվելու դեպքում հոդվածը չի վերադարձվում:

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Статьи представляются на армянском, русском или английском языках. Объем статьи не должен превышать 10 печатных страниц. Шрифт – Sylfaen, размер шрифта – 10pt, межстрочный интервал – 1. Формат страницы – A4 (210×297мм). Поля: сверху – 5см, снизу – 5.1 см, слева – 5.75см, справа – 1.75см. Название статьи набирается заглавными буквами, выравнивание по центру, шрифт: **bold**, размер шрифта – 12pt. И.О.Фамилия автора(ов) набирается строчными буквами, шрифт: ***bold italic***, размер шрифта – 10pt. Аннотация представляется на трех языках, размер шрифта – 9pt. 5–6 ключевых слов также на трех языках. Все формулы и математические выражения набираются редактором MathType (Euclid10.eqp) или Microsoft Equation 4.0, *italic*, размер шрифта – 10pt. Формулы набираются с новой строки в центре, номер формулы ставится в конце строки, в скобках. Цитированная литература нумеруется по порядку ссылки в статье, в квадратных скобках ([1],[2],...). В конце статьи пишется дата (число/месяц/год) представления статьи. Статья в двух экземплярах и файл статьи в формате Microsoft Office Word (*.doc или *.docx) представляется ответственному секретарю. **Статьи, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.** Представленные статьи рецензируются. Отклоненные редакционным советом статьи не возвращаются. Редакционный совет оставляет за собой право окончательного редактирования статьи.

ARTICLE DESIGNING GUIDELINES

Articles may be presented in the Armenian, Russian or English languages. The whole size of an article should not exceed 10 printed pages. Font - Sylfaen, font size - 10pt, line spacing - 1. Paper size - A4(210×297mm), margins: top - 5sm, bottom- 5.1sm, left - 5.75sm, right - 1.75sm. The name of article is typed in block letters, alignment on the center, font style - **bold**, the size - 12pt. Initials of the author(s) are typed by lower case letters, font style - ***bold italic***, the size - 10pt. The abstracts are presented on three languages, with 5-6 keywords, font size 9pt. All formulas and mathematical expressions should be typed by MathType (Euclid10.eqp) or Microsoft Equation editor, font style – *italic*, the size – 10pt. Basic formulas are typed since a new line in the center. The number of the formula is put in the end of a line, in brackets. The references are numerated in square brackets ([1],[2],...) in order of occurrence in the article. In the end of article the date (number/month/year) of submission of the article should be written. Articles, printed in 2 copies with the file written in Microsoft Office Word (*.doc or *.docx) format, should be submitted to the responsible secretary. **Articles issued without observance of these rules, return without consideration**. Presented articles are reviewed. Articles rejected by the editorial board do not return. The editorial board reserves the right to the final edition of the article.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ

ՀԱՏՈՐ 12 № 1

2016

МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

ТОМ 12 № 1

2016

MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL

VOLUME 12 № 1

2016

Խմբագիրներ՝

Ժ.Ս. Սեյրանյան

Հ. Յ. Պետրոսյան

Տեխնիկական խմբագիր

Ա.Ս. Տոնոյան

Ստորագրված է տպագրության՝ 15.11.07թ.: Տպագրությունը՝ փոքր օֆսեթ: Ֆորմատ՝ (70x100) 1/16: Թուղթը՝ «օֆսեթ»: 5 տպ. մամ.:

Պատվեր՝ ???980 Տպաքանակ՝ 120

Տպագրված է Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանի տպարանում

Երևան, Տերյան 105