ISBN 1829-3344 МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ . 2016. ТОМ 12, № 1

УДК 514.112.6; 514.174.2

ФРАКТАЛЬНАЯ ПРИРОДА ГРУПП ШОТТКИ

А.Г. Аракелян
(Национальный политехнический университет Армении)
E-mail: armarakelyan@seua.am

Рассматриваются различные способы построения ковра Аполлония. Помимо геометрического построения ковра, исследованы различные клейновые группы, производящие одинаковые ковры Аполлония, и выявлены некоторые связи между ними. Однако вопрос определения более точного соотношения между ними, объясняющего это совпадение, остается открытым.

Ключевые слова: ковер Аполлония, декартова конфигурация окружностей, клейновые группы, преобразования Мебиуса, группы Шоттки.

1°. Группы Клейна. Пусть $\text{Möb}(\tilde{\mathbb{C}})$ — группа всех дробно-линейных отображений

$$\gamma(z) = (az+b)\,/\,(cz+d),\ \ ad-bc=1,\ \ (a,b,c,d\in\mathbb{C})$$

расширенной комплексной плоскости $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, известная как преобразования Мебиуса. Эта группа называется *мебиусовой.* Преобразования Мебиуса могут быть представлены в виде 2×2 обратимых матриц, т.е. имеется естественный изоморфизм

$$\text{Möb}(\tilde{\mathbb{C}}) \cong PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})\,/\,\{\pm I\},$$

где I — единичная 2×2 матрица:

$$\varphi : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \gamma_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Напомним, что преобразование $\gamma \neq I$ называется: *эллиптическим,* если квадрат его следа $\operatorname{tr}^2\gamma = (a+d)^2$ удовлетворяет неравенству $0 \le \operatorname{tr}^2\gamma < 4$; *гиперболическим,* если $\operatorname{tr}^2\gamma > 4$; *параболическим,* если $\operatorname{tr}^2\gamma = 4$, и *локсодромическим,* если $\operatorname{tr}^2\gamma \in \mathbb{C}\setminus[0,4]$. Классификация этих преобразований может быть основана также, например, на свойствах их неподвижных точек, число которых равно единице для параболических преобразований и двум - в остальных случаях.

Будем рассматривать *дискретные* подгруппы $\Gamma \subset \text{Möb}(\tilde{\mathbb{C}})$, т.е. такие, в которых единица является изолированным элементом.

Говорят, что группа Γ действует *разрывно* в точке $z \in \tilde{\mathbb{C}}$, если стабилизатор $\Gamma_z = \{\gamma\in\Gamma \mid \gamma(z)=z\}$ точки z в Γ конечен и существует такая окрестность U_z точки z, что $\gamma(U_z)\cap U_z = \varnothing$ для всех $\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma_z$ и $\gamma(U_z)=U_z$ для всех $\gamma\in\Gamma_z$. Множество $\Omega(\Gamma)$ точек $z\in\tilde{\mathbb{C}}$, в которых Γ действует разрывно, называется *множеством разрывности* группы Γ. Это множество открыто. Его дополнение $\Lambda(\Gamma) = \tilde{\mathbb{C}}\setminus\Omega(\Gamma)$ называется *предельным множеством* группы Γ и представляет собой множество накопления *орбит* $\Gamma z_0 = \{\gamma(z_0) \mid \gamma \in \Gamma\}$ для всех точек $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$.

Группа Γ называется (*собственно*) *разрывной,* если $\Omega(\Gamma)$ не пусто. Тогда предельное множество $\Lambda(\Gamma)$ нигде не плотно в $\tilde{\mathbb{C}}$ и совпадает с замыканием множества неподвижных точек неэллиптических элементов Γ. Ясно, что разрывная группа дискретна; обратное, вообще говоря, не верно. Можно показать, что предельное множество разрывной группы либо пусто, либо состоит из одной или двух точек, либо бесконечно. Если $\operatorname{card}\Lambda(\Gamma) \le 2$, то группа Γ называется *элементарной.*

Разрывная группа, у которой $\Lambda(\Gamma)$ состоит более чем из двух точек, называется *клейновой.* Иногда элементарные группы также относятся к клейновым.

Назовем *группой Шоттки* клейновую группу Γ с образующими $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p, p \ge 1,$ для которых существуют $2p$ непересекающиеся жордановые кривые $l_1, l_1', l_2, l_2', \ldots, l_p, l_p'$, ограничивающие $2p$-связную область D такую, что $\gamma_i(D) \cap D = \varnothing$ и $\gamma_i(l_i) = l_i'$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Можно доказать, что группа Шоттки чисто локсодромическая, т.е. все ее элементы $\gamma \in \Gamma \setminus \{I\}$ – локсодромические или гиперболические.

Группа, порождённая отображениями $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, это множество всевозможных композиций отображений γ_j и обратных к ним.

Классическая группа Шоттки $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p \rangle$ - клейновая группа, связанная с не имеющими общих внутренних точек, но, возможно, касающихся на границах $2n$ кругов на плоскости $\tilde{\mathbb{C}}$. Порождающий элемент группы $\gamma_j, j = 1, \ldots, p$ отображает интерьер окружности C_{2j-1} на экстерьер окружности C_{2j} и наоборот.

Одна из основных проблем теории клейновых групп – изучение структуры предельного множества $\Lambda(\Gamma)$ [1]. В настоящей работе дается построение примеров клейновых групп, предельные множества которых суть ковры Аполлония**.**

2°. Ковры Аполлония. Ковер Аполлония - одно из самых красивых фрактальных множеств [2], построение которого может быть описано простым способом - на основе древней задачи Аполлония Пергского (для заданных трех окружностей на плоскости можно построить ровно две окружности, касающиеся всех трех). Начиная с четырех попарно касающихся окружностей на плоскости (декартова конфигурация [3]) добавляем новые окружности, касающиеся всевозможных троек предыдущих окружностей, согласно задаче Аполлония. Продолжая этот процесс до бесконечности, приходим к упаковке бесконечно многих окружностей, называемой *ковром Аполлония* (рис. 1).

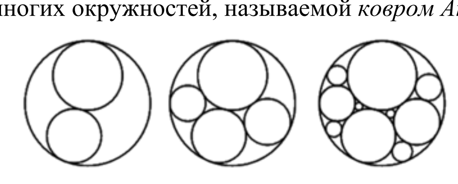

Рис. 1. Построение ковра Аполлония

Ясно, что в зависимости от исходной конфигурации кругов ковер Аполлония может принимать четыре различные формы (рис. 2).

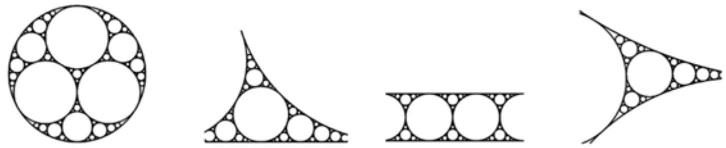

Рис. 2. Ковры Аполлония

Далее рассмотрим действие групп дробно-линейных преобразований Мёбиуса в связи с коврами Аполлония. Целью работы является использование параметров дробно-линейного отображения для построения ковра Аполлония и исследования его свойств. Следует отметить, что мы переводим геометрическую задачу в задачу с параметрами, которую можно решить алгебраически, при этом используются такие подгруппы мёбиусовых преобразований, которые дискретны, т.е. образы близких окружностей могут оказаться на сфере, удаленной на значительные, но конечные расстояния, что позволяет заполнять получающиеся криволинейные треугольники окружностями все меньших радиусов. Как известно, преобразование Мёбиуса обладает свойством сохранения углов и окружностей, в частности, оно переводит касающиеся окружности в касающиеся окружности (здесь и далее линии на $\mathbb{C}$ будем понимать как окружности бесконечного радиуса на $\tilde{\mathbb{C}}$). Хотя, на первый взгляд, различные выборы начальных кругов приводят к разным и не похожим друг на друга коврам, тем не менее все получаемые картины в определенном смысле эквивалентны. Более того, любой ковер Аполлония преобразованием Мебиуса может быть отображен на любом другом ковре.

3°. АПОЛЛОНИЕВА ГРУППА. Ковер Аполлония $\mathcal{A}$, порожденный конфигурацией Декарта $\mathcal{D}$, можно описать с помощью определенной группы преобразований Мёбиуса следующим образом.

Пусть $\mathcal{D}_0 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ - начальная декартова конфигурация ковра Аполлония. Рассмотрим группу мёбиусовых преобразований

$$\mathcal{S}(\mathcal{D}_0) = \langle \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_4 \rangle \subset \mathrm{M\ddot{o}b}(\tilde{\mathbb{C}}),$$

действующих на $\tilde{\mathbb{C}}$, где $\mathfrak{s}_i$ - инверсия относительно окружности $C_i^{\perp}$ - проходящей через точки касания окружностей $C_j, j \neq i$. Инверсия $\mathfrak{s}_i$ фиксирует три начальные окружности $C_j \in \mathcal{D}_0, j \neq i$ и переводит окружность C_i в новую окружность $C_i' := \mathfrak{s}_i(C_i)$, касающуюся трех окружностей $C_j, j \neq i$. Заметим, что окружности $C_i^{\perp}, i = \overline{1,4}$ образуют двойственную конфигурацию Декарта $\mathcal{D}_0'$ (см. рис. 3).

Если вместо исходной декартовой конфигурации $\mathcal{D}_0$ рассмотреть другую конфигурацию $\mathcal{D}$, то получим другую группу инверсий $\mathcal{S}(\mathcal{D})$. Тем не менее эти две группы всегда можно сопрягать с помощью преобразований Мёбиуса. Именно поэтому достаточно исследовать только случай $\mathcal{S}(\mathcal{D}_0)$.

Поскольку круги ковра Аполлония лежат на расширенной плоскости $\tilde{\mathbb{C}}$, которую можно рассматривать как границу $\delta_\infty(\mathbb{H}^3)$ гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$, то группа $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ дискретна и действует разрывно на $\mathbb{H}^3$. Следовательно, $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ есть *группа Клейна*. Заметим, что группа $\mathcal{S}(\mathcal{D})$ действует инвариатно относительно ковра $\mathcal{A}$, имеет четыре $\mathcal{S}$-орбиты $\mathcal{S}(C_i)$ и удовлетворяет условию $\mathcal{A} = \bigcap_{i=1}^{4} \mathcal{S}(C_i)$. Поэтому группу $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}) \triangleq \mathcal{S}(\mathcal{D})$ назовем *геометрической группой Аполлония.*

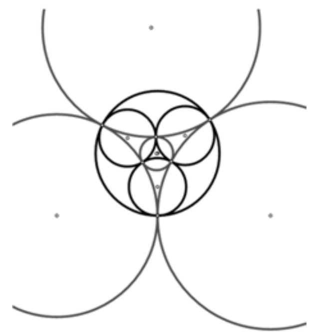

Рис. 3. Двойственная конфигурация Декарта

Пусть $\mathcal{A}$ - ковер Аполлония. Тогда *остаточное множество* $\mathcal{A}$ определяется соотношением

$$\operatorname{Res}(\mathcal{A}) = \overline{\bigcup_{C \in \mathcal{A}} C} .$$

Равносильно, если взять дополнение в $\tilde{\mathbb{C}}$ внутренностей всех окружностей ковра $\mathcal{A}$.

ТЕОРЕМА 1. Для группы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ и ковра Аполлония $\mathcal{A}$ имеет место следующее соотношение:

$$\operatorname{Res}(\mathcal{A}) = \Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})),$$

где $\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$ - предельное множество группы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$ есть множество точек накопления орбиты $\mathcal{S}(z)$ произвольной точки $z \in \mathbb{H}^3$, а $\operatorname{Res}(\mathcal{A})$ - замыкание всех точек касания окружностей ковра $\mathcal{A}$, то $\Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})) \subset \operatorname{Res}(\mathcal{A})$.

Далее, пусть $z \in \operatorname{Res}(\mathcal{A})$, а $N -$ произвольное открытое множество содержащее z. Тогда ясно, что N содержит бесконечное число окружностей из $\mathcal{A}$, но поскольку $\mathcal{A}$ порождается орбитами $\mathcal{S}(C_i), i = \overline{1,4}$, то существуют индекс i и бесконечная последовательность $\mathfrak{S}_k$ элементов $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ такие, что $\mathfrak{S}(C_i) \subset N$ для всех k. Следовательно, $z \in \Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$, т.е. $\operatorname{Res}(\mathcal{A}) \subset \Lambda(\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}))$.

Вернемся снова к декартовой конфигурации $\mathcal{D}_0 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ (рис. 3). Если предположить, что C_1 - единичная окружность, то можно легко найти аналитические выражения для инверсии $\mathfrak{s}_i$. Учитывая, что инверсия относительно окружности с радиусом r с центром в точке w задается соотношением

$$\mathfrak{i}(z) = \frac{w\overline{z} + r^2 - w\overline{w}}{z - \overline{w}},$$

то после несложных вычислений для генераторов группы Аполлония получим

$$\mathfrak{s}_1(z) = \frac{\overline{z}}{-4iz + 1}, \ \mathfrak{s}_2(z) = \overline{z}, \ \mathfrak{s}_3(z) = \frac{(1+i)\overline{z} - 1}{\overline{z} - 1 + i}, \ \mathfrak{s}_4(z) = \frac{(-1+i)\overline{z} - 1}{\overline{z} + 1 + i}.$$

Заметим, что инверсии $\mathfrak{s}_k, \ k = 1,2,3,4$ являются конформными, но меняющими ориентацию отображениями. Тем не менее их можно переписать в виде композиций, сохраняющих ориентацию отображений (т.е. элементов из $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$), и в виде отображения комплексного сопряжения $\mathfrak{j} : z \to \overline{z}$. Таким образом, $\mathfrak{s}_k = \alpha_k \circ \mathfrak{j}$, где α_k представляются следующими матрицами:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4i & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1+i & -1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}.$$

Если учесть, что *общая группа Мёбиуса* $\mathrm{GM\ddot{o}b}(\tilde{\mathbb{C}})$ получается расширением группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ путем добавления к ней преобразования $\mathfrak{j} : z \to \overline{z}$, т.е. $\mathrm{GM\ddot{o}b}(\tilde{\mathbb{C}}) =< \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}), \mathfrak{j} >$, то подгруппу $\mathcal{S}^h_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ сохраняющих ориентацию голоморфных элементов группы $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$ можно представить в виде

$$\mathcal{S}^h_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}) \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}).$$

Учитывая, что $\alpha_2 = I$ и $\overline{\alpha}_k = \alpha_k^{-1}$, получим

$$\mathcal{S}^h_{\mathcal{A}}(\mathcal{D}) =< \alpha_1\overline{\alpha}_2, \alpha_1\overline{\alpha}_3, \alpha_1\overline{\alpha}_4, \alpha_2\overline{\alpha}_1, \alpha_2\overline{\alpha}_3, \alpha_2\overline{\alpha}_4, \alpha_3\overline{\alpha}_1, \alpha_3\overline{\alpha}_2, \alpha_3\overline{\alpha}_4, \alpha_4\overline{\alpha}_1, \alpha_4\overline{\alpha}_2, \alpha_4\overline{\alpha}_3 >=$$
$$=< \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 >.$$

4°. Группы Шоттки. Рассмотрим теперь группы Шоттки и покажем, что остаточное множество ковров Аполлония можно рассматривать как предельное множество этих групп.

Рассмотрим начальную декартову конфигурацию ковра Аполлония $\mathcal{D}_0 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ вместе с двойственной конфигурацией $\mathcal{D}_0'$. Как и в предыдущем разделе, предположим, что C_1 - единичная окружность, и покажем, что существует группа Шоттки, порождающие элементы которой соединяют в пары круги двойственной декартовой конфигурации, а предельное множество совпадает с остаточным множеством ковра $\mathcal{A}$.

В частности, допустим, что $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ - порождающие элементы группы $\mathcal{G}_0$ такие, что $\mathfrak{g}_1$ отображает окружность $C_1^{\perp}$ на окружность $C_2^{\perp}$, а интерьер окружности $C_1^{\perp}$ - на экстерьер окружности $C_2^{\perp}$. Аналогично, $\mathfrak{g}_2$ отображает окружность $C_3^{\perp}$ на окружность $C_4^{\perp}$, а интерьер окружности $C_3^{\perp}$ - на экстерьер окружности $C_4^{\perp}$. Для того чтобы предельное множество группы Шоттки с касающимися начальными кругами Шоттки образовало кривую, необходимо наложить следующие условия на точки касания:

$$\mathfrak{g}_1(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i)=1,\ \mathfrak{g}_1(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i)=-1,\ \mathfrak{g}_2(-1)=1,\ \mathfrak{g}_2(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i)=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i.$$

Для наглядного понимания этих требований достаточно взглянуть на рис. 4, где изображены исходные круги Шоттки и ковер Аполлония, а на рис. 5 продемонстрировано, как круги Шоттки скапливаются, аппроксимируя предельное множество.

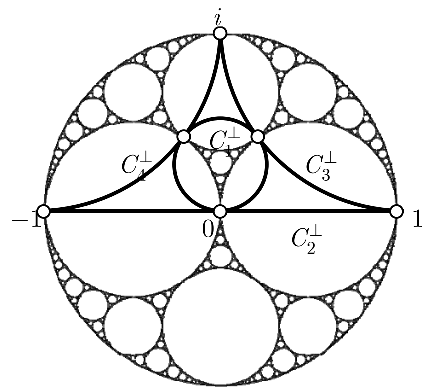

Рис. 4. Точки касания исходных кругов Шоттки и ковер Аполлония

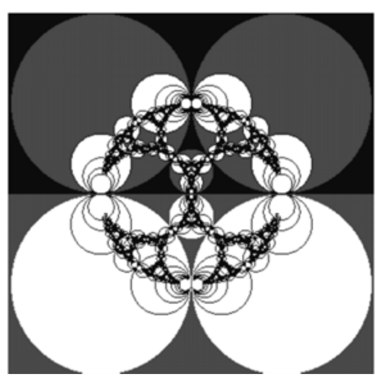

Рис. 5. Скопление орбит кругов Шоттки

Теперь, так как преобразования Мебиуса действуют трижды транзитивно на плоскости $\tilde{\mathbb{C}}$, то после несложных вычислений получим

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}_2 = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\mathrm{trace}(\mathfrak{g}_1) = \mathrm{trace}(\mathfrak{g}_2) = 2$, т.е. $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ - параболические преобразования, значит они имеют ровно одну неподвижную точку на $\tilde{\mathbb{C}}$. Более того, коммутатор

$$\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_1^{-1}\mathfrak{g}_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1-2i & 2i \\ -2i & -1+2i \end{pmatrix}$$

тоже параболический. Следовательно, группа Шоттки, производящая ковер Аполлония, отличается наличием двух параболических образующих и одного параболического коммутатора. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Предельное множество $\Lambda(\mathcal{G}_0)$. Группа Шоттки $\mathcal{G}_0 = \langle \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \rangle$ с двумя параболическими образующими

$$\mathfrak{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}_2 = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$$

совпадает с остаточным множеством ковра $\mathcal{A}$ с начальной декартовой конфигурацией $\mathcal{D}_0$.

Как и в случае аполлониевой группы, если вместо исходной декартовой конфигурации $\mathcal{D}_0$ рассмотреть другую конфигурацию $\mathcal{D}$, то получим другую группу Шоттки $\mathcal{G}$. Тем не менее всегда можно найти преобразование Мёбиуса β такое, что $\beta\mathcal{G}\beta^{-1} = \mathcal{G}_0$ и $\beta(\mathcal{D}_0) = \mathcal{D}$. Именно поэтому достаточно исследовать только случай $\mathcal{G}_0$. Тем самым получаем следующее более общее утверждение.

Теорема 2. Для заданного ковра Аполлония $\mathcal{A}$ существует классическая группа Шоттки второго рода $\mathcal{G}$ с параболическими образующими и параболическим коммутатором такая, что $\mathrm{Res}(\mathcal{A}) = \Lambda(\mathcal{G})$.

Доказательство. Используя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, получим утверждение теоремы.

Есть очевидные отношения между группой Шоттки $\mathcal{G}_0$ и группой $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^h(\mathcal{D})$ голоморфных элементов $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{D})$. Действительно, группа $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}^h(\mathcal{D})$ порождается тремя параболическими элементами $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$, которые связаны с параболическими элементами $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_1^{-1}\mathfrak{g}_2^{-1}$ группы $\mathcal{G}_0$ следующими соотношениями:

$$\alpha_1 = \mathfrak{g}_1^{-2}, \quad \alpha_4\alpha_3^{-1} = \mathfrak{g}_2^{-2}, \quad \alpha_3^2 = \mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_1^{-1}\mathfrak{g}_2^{-1}.$$

Однако эти группы не совсем одинаковы. Необходимо определить более точное соотношение между ними, объясняющее, как они приводят к одному и тому же ковру Аполлония.

В заключение приведем несколько примеров предельных множеств групп Шоттки (рис.6), в которых левые круги соответствуют порождающим исходным кругам Шоттки.

Многие из этих предельных множеств имеют самоподобные структуры, которые напоминают фракталы.

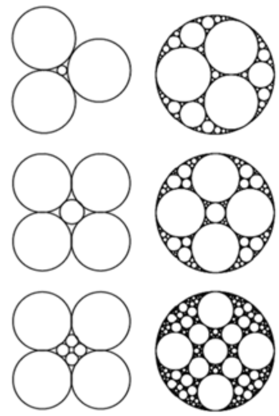

Рис. 5. Предельные множества групп Шоттки

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушкаль С.Л., Апанасов В.Н., Гусевский Н.А. *Клейновые группы и униформизация в примерах и задачах*.- М.: Наука, 1981.
2. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature*.- New York: W.H. Freeman, 1983.
3. Lagarias J.C., Mallows C.L., Wilks A.R. *Beyond the Descartes Circle Theorem* // American Mathematical Monthly.- 2002.-109(4).- P. 338-361.

Материал поступил в редакцию 09.02.2016.

ՇՈՏՏԿԻ ԽՄԲԵՐԻ ՖՐԱԿՏԱԼԱՅԻՆ ԲՆՈՒՅԹԸ

Ա.Հ. Առաքելյան

Դիտարկվում են ապոլլոնյան գորգերի կառուցման տարբեր մեթոդներ: Ի լրումն գորգի երկրաչափական կառուցման, ուսումնասիրվում են տարբեր կլեյնյան խմբեր, որոնք ծնում են միանման ապոլլոնյան գորգեր, և բացահայտվում են դրանց միջև առկա որոշ կապեր:

Առանցքային բառեր. ապոլլոնյան գորգեր, շրջանագծերի դեկարտյան կոնֆիգուրացիաներ, կլեյնյան խմբեր, Մյոբիուսի ձևափոխություններ, Շոտտկիի խմբեր:

THE FRACTAL NATURE OF SCHOTTKY GROUPS

A.H. Arakelyan

The different ways for the construction of Apollonian gasket was introduced. Apart from the geometric construction, two difeerent but closely related Kleinian groups that produce the same gasket were examined and some of their connections were revealed. However, there is still left to discover an explicit relation between them in order to explain this coincidence.

Keywords: Apollonian gasket, Descartes configuration, Kleinian group, Schottky groups.