УДК 517. 948

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОДКЛАССАМИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

И.В. Оганисян
(Национальный политехнический университет Армении)
E-mail: ishkhanh@gmail.com

Рассмотрены некоторые соотношения между подклассами функций ограниченного вида N_α М.М. Джрбашяна и T_β Л. Карлесона, а также одно граничное свойство функций класса $N_\alpha\left(-1<\alpha<-1/2\right)$.

Ключевые слова: классы Карлесона и Джрбашяна, коэффициенты Тейлора, произведения Бляшке и М.М. Джрбашяна, емкость множества.

Классы мероморфных в единичном круге функций $N_\alpha\left(-1<\alpha<\infty\right)$ М.М. Джрбашяна совпадают с множеством функций $F(z)$, которые допускают представление вида [1,2]

$$F(z)=c\cdot z^{\lambda}\,\frac{B_\alpha(z;a_\mu)}{B_\alpha(z;b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\Psi\left(\theta\right)\right\},\tag{1}$$

где c - постоянная; λ- целое число; функция $S_\alpha\left(z\right)$ имеет вид

$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\},$$

а $\Psi\left(\theta\right)$ - произвольная вещественная функция ограниченной вариации на сегменте $\left[0,2\pi\right]$.

Функции $B_\alpha(z;a_\mu)$ и $B_\alpha(z;b_\nu)$- сходящиеся в круге $|\,z_k\,|<1$ бесконечные произведения с нулями $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ соответственно, которые при $\alpha=0$ совпадают с произведением Бляшке:

$$B\left(z;z_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\overline{z}_k z}\cdot\frac{|\,z_k\,|}{z_k}.\tag{2}$$

Множество нулей произведения Бляшке должно удовлетворять условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-|\,z_k\,|\right)<\infty.$$

Классы $N_\alpha\left(-1<\alpha<\infty\right)$ с убыванием α монотонно сужаются, в частности,

$$N_\alpha\subset N_0\,,-1<\alpha<0,$$
$$N_0\subset N_\alpha,0<\alpha<\infty,$$

где $N_0 \equiv N$ - класс функций ограниченного вида Р. Неванлинны.

Для функций класса $N_\alpha \left(-1 < \alpha \le 0\right)$ известно представление [2].

Теорема A. Пусть $F\left(z\right) \subset N_\alpha \left(-1 < \alpha \le 0\right)$. Тогда существуют ограниченные аналитические функции

$$f_i\left(z\right) = \sum a_n^{(i)} z^n \in N_\alpha, \quad i = 1,2,\ldots$$

такие, что

$$F\left(z\right) = \frac{f_1\left(z\right)}{f_2\left(z\right)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} z^n}, \tag{3}$$

причем

$$\left|a_n^{(i)}\right| = \mathrm{O}\left(n^\alpha\right), \quad n \to \infty;\ i = 1,2,\ldots\ .$$

Обозначим через $A_\alpha^* \left(-1 < \alpha < +\infty\right)$ множество тех функций из N_α, которые допускают представление вида

$$f\left(z\right) = Cz^\lambda B_\alpha\left(z; z_k\right) \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha\left(e^{-i\theta} z\right) d\psi\left(\theta\right)\right\},$$

где $\psi\left(\theta\right)$ - невозрастающая функция.

Классы $A_\alpha^* \left(-1 < \alpha \le 0\right)$ являются некоторыми подклассами ограниченных аналитических функций классов N_α. Для тейлоровских коэффициентов этих функций (в том числе и для произведений B_α) известна оценка [2]: если функция $f\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\left|z\right| < 1$ принадлежит классу $A_\alpha^* \left(-1 < \alpha \le 0\right)$, то имеет место оценка

$$\left|a_n\right| = O\left(n^\alpha\right),\ n \to \infty\,. \tag{4}$$

Следующая теорема характеризует граничное свойство функций класса $N_\alpha \left(-1 < \alpha < 0\right)$ [3].

Теорема B. Если функция $F\left(z\right) \in N_\alpha \left(-1 < \alpha < 0\right)$, то существует предел

$$F\left(e^{i\theta}\right) = \lim_{r \to 1-0} F\left(re^{i\theta}\right)$$

для любого $\theta \in \left[0, 2\pi\right]$, кроме, быть может, некоторого множества $E \subset \left[0, 2\pi\right]$, емкость $\gamma = 1 + \alpha$ которого равна нулю.

Напомним, что множество E, измеримое B, имеет положительную емкость γ (по Фростмону), $0 < \gamma < 1$, если найдется такая мера $\mu \prec E$ (будем говорить, что мера μ сосредоточена на множестве E, и писать $\mu \prec E$, если $\mu\left(E\right) = 1$, т.е. если $\int_E d\mu = 1$), для которой функция

$$V_{\gamma}\left(x,r\right)=\int_{0}^{2\pi}\frac{d\mu}{\left|e^{it}-re^{ix}\right|^{\gamma}}$$

остается равномерно ограниченной по x при $r\to 1-0$, т.е. при некотором $\mu\prec E$:

$$V_{\gamma}\left(\mu\right)=\underset{0<r<1}{Sup}\left\{\max_{0\le x\le 2\pi}V_{\gamma}\left(x,r\right)\right\}<+\infty .$$

Если же для любой меры $\mu\prec E$ будет $V_{\gamma}\left(\mu\right)=+\infty$, то E имеет емкость γ, равную нулю, и будем писать

$$Cap_{\gamma}E=0 .$$

В работе [4] доказывается неулучшаемость теоремы B.

Приведем некоторые элементарные свойства емкости, которые нам понадобятся в дальнейшем:

1. Если для некоторого $\gamma\in\left(0,1\right)$ и множества E имеем $Cap_{\gamma}E=0$, то для любого $\gamma',\ \gamma\le\gamma'<1$ имеем также $Cap_{\gamma'}E=0$.

2. Если $Cap_{\gamma}E_{k}=0$, $k=1,2,\ldots,p$, то

$$Cap_{\gamma}\left\{\bigcup_{1}^{p}E_{k}\right\}=Cap_{\gamma}\left\{\bigcap_{1}^{p}E_{k}\right\}=0 .$$

Отметим, что теорема B доказывается непосредственным применением параметрического представления (1), но аналогичное граничное свойство можно получить также и из представления теоремы А, однако оно получается более слабым, чем теорема B.

Это объясняется тем, что представление (1) является необходимым и достаточным условием принадлежности функций классу N_{α}, т.е. оно полностью характеризует класс N_{α}. А представление (3) является только необходимым условием для того, чтобы функция принадлежала классу $N_{\alpha}\left(-1<\alpha<0\right)$ [5].

Отметим, что еще раньше, до введения классов N_{α}, Карлесоном [6] были рассмотрены другие классы мероморфных функций, входящие в класс N. Эти классы существенно отличны от классов $N_{\alpha}\left(-1<\alpha<0\right)$ и определяются следующим образом.

Для данного значения $\beta\ \left(0<\beta<1\right)$ в класс T_{β} входят мероморфные в круге $\left|z\right|<1$ функции $\omega\left(z\right)$, для которых

$$T_{\beta}\left(\omega\right)\equiv\int_{0}^{1}\left(1-r\right)^{-\beta}A\left(r,\omega\right)dr<+\infty ,$$

где $A\left(r,\omega\right)=\iint\limits_{\left|z\right|<r}\frac{|\ \omega'(z)\ |^{2}}{(1+|\ \omega(z)\ |^{2})^{2}}dxdy$ - известная функция Альфорса-Симидзу.

В своем исследовании Карлесон установил, что для каждой функции $F(z) \in T_\beta$ утверждение теоремы В справедливо, притом для значения $\gamma = 1 - \beta$.

Для классов T_β имеется также аналогичный теореме А результат [6]:

Теорема С. Если $\omega\left(z\right) \in T_\gamma\left(0 < \gamma < 1\right)$, то существуют две ограниченные, аналитические функции

$$\varphi\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \psi\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

такие, что $\omega(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|a_n\right|^2 \frac{n^\gamma}{\left(\log n\right)^{1+\delta}} < \infty, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left|b_n\right|^2 \frac{n^\gamma}{\left(\log n\right)^{1+\delta}} < \infty$$

для любого $\delta > 0$. В частности, φ и ψ принадлежат любому классу $T_\beta\left(\beta < \gamma\right)$.

С убыванием β классы T_β монотонно расширяются и при значении $\beta = 0$ совпадают с классом N. Поэтому

$$T_0 = N_0 = N.$$

Основные результаты, полученные для классов $N_\alpha\left(-1 < \alpha \le 0\right)$ по своим формулировкам оказались близкими (в некотором смысле и более точными) к формулировкам соответствующих теорем для классов T_γ Л. Карлесона, хотя нет данных о сравнимости классов $N_\alpha\left(-1 < \alpha < 0\right)$ с классами $T_\gamma\left(0 < \gamma < 1\right)$. Но отметим, что эти результаты для классов $N_\alpha\left(-1 < \alpha \le 0\right)$ были доказаны непосредственно из их факторизационных представлений, а для классов T_γ они были выявлены Карлесоном довольно окольными путями, так как не была выяснена их аналитическая структура и не были известны факторизационные представления, характеризующие эти классы.

Для классов T_γ Карлесоном [6] доказана следующая теорема.

Теорема Д. Ограниченная, аналитическая функция

$$\omega\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \left|z\right| < 1$$

принадлежит классу $T_\gamma\left(0 < \gamma < 1\right)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n\right|^2 n^\gamma < \infty.$$

Будем использовать также [7].

Теорема (Салема-Зигмунда). Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) k^\beta < \infty \ \left(0 < \beta < 1\right),$$

то тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta\right)$$

может расходиться только на множестве $\left(1-\beta\right)$, емкость которого равна нулю.

Основные результаты. Теперь, используя теорему Д и оценку (4), а также одно свойство $A_\alpha^*\left(-1<\alpha\le 0\right)$, легко доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\omega\left(z\right)$ принадлежит классу $A_\alpha^*\left(-1<\alpha<-\frac{1}{2}\right)$, то она принадлежит также любому классу $T_\gamma\left(0\le\gamma<-2\alpha-1\right)$.

Теорема 2. Любую функцию класса $N_\alpha\left(-1<\alpha<-\frac{1}{2}\right)$ можно представить как частное двух ограниченных, аналитических функций классов T_γ, где γ - любое число из интервала $\left[0,-2\alpha-1\right)$.

Докажем также следующую теорему.

Теорема 3. Если $F\left(z\right)\in N_\alpha\left(-1<\alpha<-\frac{1}{2}\right)$, тогда радиальный предел

$$F\left(e^{i\theta}\right)=\lim_{r\to 1-0}F\left(re^{i\theta}\right)$$

существует всюду на $\left[0,2\pi\right]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества E, емкость γ которого равна нулю, где γ - любое число из интервала $\left(2\left(1+\alpha\right),1\right)$.

Доказательство. Имея в виду теорему А и соответствующее свойство емкости, достаточно показать утверждение для функций $f_i\left(z\right),\ i=1,2$.

Так как

$$\left|a_n^{(i)}\right|\le c^{(i)}n^\alpha,\ i=1,2,$$

поэтому

$$\left|a_n^{(i)}\right|^2 n^{1-\gamma}\le\left(c^{(i)}\right)^2 n^{2\alpha-\gamma+1}.$$

Из условий $2\left(1+\alpha\right)<\gamma<1$ получим $2\alpha-\gamma+1<-1$, и поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n^{(ii)}\right|^2 n^{1-\gamma}$ сходится.

Для завершения доказательства достаточно применить теорему Салема-Зигмунда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*.- М.: Наука, 1966.- 672 с. (гл. IX).
2. Джрбашян М.М., Захарян В.С. *Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге*.- М.: Наука, 1993.- 224 с.
3. Джрбашян М. М., Захаарян В. С. *Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида* // Изв. АН СССР. Сер. Мат.- 1970.- Т. 34.- С. 1262-1339.
4. Джрбашян М.М., Мадоян С.В. *О граничных значениях функций класса* $N_\alpha \left(-1 < \alpha < 0\right)$ *М.М. Джрбашяна* // ДАН АрмССР.- 1984.- Т. IXXIX, N1.- С. 7-9.
5. Оганисян И.В. *Об одном представлении классов* $N_\alpha \left(-1 < \alpha < 0\right)$ // Доклады НАН Армении.- 2013.- Т. 113, N. 4.- С. 337-342.
6. Carleson L. *On a classes of meromorphic functions and its associated expectional sets*.- Uppsala, 1950.
7. Бари Н. *Тригонометрические ряды*.- М., 1961.

Материал поступил в редакцию 11.02.2016.

ՈՐՈՇ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԵՍՔԻ ՄԵՐՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵՆԹԱԴԱՍԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Ի. Վ. Հովհաննիսյան

Դիտարկվում են որոշ առնչություններ սահմանափակ տեսքի ֆունկցիաների Մ. Մ. Ջրբաշյանի N_α և Կառլեսոնի T_β ենթադասերի միջև: Դիտարկվում է նաև $N_\alpha \left(-1 < \alpha < -1/2\right)$ դասի ֆունկցիաների մի եզրային հատկություն:

Առանցքային բառեր. Կառլեսոնի և Ջրբաշյանի դասեր, Թեյլորի գործակիցներ, Բլյաշկեի և Ջրբաշյանի արտադրյալներ, բազմության ունակություն:

SOME CONNECTIONS BETWEEN SUBCLASSES OF MEROMORF FUNCTIONS BOUNDED TYPES

I.V. Hovhannisyan

In this paper we consider some connections between classes N_α M. M. Djrbashyan and L. Carleson T_β- subclasses of class functions bounded type. A boundary property of class $N_\alpha \left(-1 < \alpha < -1/2\right)$ is considered too.

Keywords: classes of Carleson and Djrbashyan, Taylor coefficients, Blashke and Djrbashyan products, capacity of a set.