УДК 517. 948

ГЕОМЕТРИЯ ОДНОГО КЛАССА НОРМАЛЬНО ПЛОСКИХ РИЧЧИ-ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.А. Мирзоян, А.Р. Назарян

(Национальный политехнический университет Армении**)**

E-mail: vmirzoyan@mail.ru; aram.nazaryan@gmail.com

Даётся геометрическое описание одного класса нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два с нулевым индексом сингулярности и индексом регулярности два в евклидовых пространствах. Подробно исследуется класс эйнштейновых подмногообразий, которые представляют собой каналовые подмногообразия.

Ключевые слова: риччи-полусимметрические подмногообразия, конусы, эйнштейновы подмногообразия.

1°. Введение. Пусть M – риманово многообразие с тензором Риччи R_1 и операторами кривизны $R\left(X,Y\right)$, где X,Y – произвольные векторные поля на M. Если $R\left(X,Y\right)R_1 = 0$ для любых X,Y, то тензор R_1 называется полупараллельным, а само многообразие M называется риччи-полупараллельным или риччи-полусимметрическим. Риччи-полусимметрические многообразия являются естественными обобщениями симметрических, эйнштейновых, полусимметрических многообразий и римановых многообразий с параллельным тензором Риччи (см. [1-3] и цитированную в них литературу). Общая классификация римановых риччи-полусимметрических многообразий была получена в [2]. В теории риччи-полусимметрических многообразий и их изометрических погружений одной из актуальных задач является задача их геометрического описания. Различные классы риччи-полусимметрических подмногообразий были исследованы в [3-11].

Настоящая работа посвящена исследованию и геометрическому описанию одного класса нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два с нулевым индексом сингулярности и индексом регулярности два. (За стандартными сведениями отсылаем к монографии [1] и к работам [4,5,8,12]).

2°. Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условиям $i_R = 2,\ \mu = \nu$**.** Пусть m-мерное нормально плоское риччи–полусимметрическое подмногообразие M евклидова пространства E_{m+2} удовлетворяет указанным условиям. Первое условие означает, что группа $W^{(1)}$ (см. [8,9]) регулярных главных векторов кривизны (г.в.к.) содержит два линейно независимых вектора, а остальные векторы являются их линейными комбинациями. Второе условие означает, что пространства дефектности $T_x^{(0)}$ и относительной дефектности T_x' (см. [8,9]) совпадают. Следовательно, подмногообразие M допускает только нулевой сингулярный г.в.к. Если T_x' является нулевым пространством, то $M-$эйнштейново подмногообразие. При $\dim T_x' \geq 1$ подмногообразие M является полуэйнштейновым.

Здесь мы рассмотрим случай, когда подмногообразие M имеет только два различных линейно независимых г.в.к. n_1, n_2 с кратностями p_1, p_2 соответственно. В этом случае $\rho = \left|n_1\right|^2 - \langle H, n_1\rangle = \left|n_2\right|^2 - \langle H, n_2\rangle$, где $\rho-$единственное ненулевое собственное значение тензора Риччи, а $H = p_1 n_1 + p_2 n_2 -$вектор средней кривизны. Если $H = 0$, то векторы n_1, n_2 будут линейно зависимы, что противоречит условию. Следовательно, в рассматриваемом случае подмногообразие не может быть минимальным. Подставляя значение H в приведённое выше равенство, получим

$$(p_1 - 1)\left|n_1\right|^2 - (p_1 - p_2)\langle n_1, n_2\rangle - (p_2 - 1)\left|n_2\right|^2 = 0 .$$

Отсюда следует, что необходимо рассмотреть всего три случая:

1) $p_1 = p_2 = 1;$

2) $\left|n_1\right|^2 = \langle n_1, n_2\rangle \left|n_1\right|^2 = \langle n_1, n_2\rangle;$

3) $p_1 \geq 2,\ p_2 \geq 2$.

Поскольку третий случай был исследован в работе В.А. Мирзояна и Г.С. Мачкаляна [9], то здесь мы рассмотрим первые два случая.

В первом случае кодефектность подмногообразия M равна двум. Как известно, всякое подмногообразие кодефектности два является полуэйнштейновым. Примером рассматриваемого класса подмногообразий кодефектности два является прямое произведение двух одинаковых окружностей и плоскости, т.е. произведение вида $S^1(r_1) \times S^1(r_1) \times L_m$ в евклидовом пространстве E_{4+m}.

Рассмотрим второй случай. Пусть $p_1 \geq 2$, $p_2 = 1$, $\left|n_1\right|^2 =< n_1, n_2 >$. Из последнего равенства следует, что $\left|n_1\right| = \left|n_2\right| \cos\varphi$. Следовательно, векторы n_1 и n_2 образуют острый угол. Кроме того, легко видеть, что условие $\left|n_1\right|^2 =< n_1, n_2 >$ равносильно $< n_1, n_1 - n_2 >= 0$, т.е. $n_1 \perp n_1 - n_2$ в каждой точке на подмногообразии M. Поскольку $\dim T_x^{(n_1)} = p_1 = p$, $\dim T_x^{(n_2)} = 1$, $\dim T_x^{(0)} = \mu$, то ортонормированный репер $\left\{x, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2}\right\}$ можем выбрать так, что $e_a \in T_x^{(n_1)}$, $e_{p+1} \in T_x^{(n_2)}$, $e_r \in T_x^{(0)}$, $e_\alpha \in T_x^\perp\left(M\right)$. Индексам в дальнейшем будем придавать следующие значения:

$$i,j,k=1,\ldots,m,\quad a,b,c=1,\ldots,p,\quad r,s,t=p+2,\ldots,m,\quad \alpha,\beta=m+1,\ m+2\,.$$

При таком выборе репера $\lambda_a^\alpha=\lambda_b^\alpha$, $a\neq b$, $\lambda_r^\alpha=0$, $\omega_r^\alpha=0$. Поскольку $n_1\perp n_1-n_2$, то единичные векторы e_{m+1}, e_{m+2} можем выбрать так, чтобы e_{m+1} был коллинеарен вектору n_1, а e_{m+2} – вектору n_1-n_2. Тогда $n_1=\lambda_a^{m+1}e_{m+1}$, $\lambda_a^{m+1}\neq 0$. Следовательно, $\lambda_a^{m+2}=0$ и, как следствие, $\omega_a^{m+2}=0$. Далее, если $n_2=\lambda_{p+1}^{m+1}e_{m+1}+\lambda_{p+1}^{m+2}e_{m+2}$, то

$$n_1-n_2=\left(\lambda_a^{m+1}-\lambda_{p+1}^{m+1}\right)e_{m+1}-\lambda_{p+1}^{m+2}e_{m+2}\,.$$

Поскольку $n_1-n_2\parallel e_{m+2}$, то $\lambda_{p+1}^{m+1}=\lambda_a^{m+1}$. Таким образом,

$$n_1=\lambda_a^{m+1}e_{m+1},\quad n_2=\lambda_a^{m+1}e_{m+1}+\lambda_{p+1}^{m+2}e_{m+2}\,,$$

$$H=\left(p+1\right)\lambda_a^{m+1}e_{m+1}+\lambda_{p+1}^{m+2}e_{m+2}\,,\ \lambda_{p+1}^{m+2}\neq 0\,.$$

В выбранном репере матрицы $\left\|h_{ij}^\alpha\right\|$ второй фундаментальной формы подмногообразия M имеют следующий вид:

$$\left\|h_{ij}^{m+1}\right\|=\begin{Vmatrix}\lambda_a^{m+1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_a^{m+1} & & & \\ & & & \lambda_{p+1}^{m+1} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{Vmatrix},\ \left\|h_{ij}^{m+2}\right\|=\begin{Vmatrix}0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \lambda_{p+1}^{m+2} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{Vmatrix}.$$

Верно и обратное. Если в некотором ортонормированном репере, адаптированном к подмногообразию M в E_{m+2}, матрицы второй фундаментальной формы приводятся к указанному выше виду с такими же условиями на диагональные элементы, как и выше, то нормальная связность будет плоской, подмногообразие M будет иметь два главных вектора кривизны n_1, n_2 кратностей p и 1 и будет выполняться условие $\left|n_1\right|^2=<n_1,n_2>$. Непосредственно можно проверить, что тензор Риччи будет иметь только одно ненулевое собственное значение $-p\left(\lambda_a^{m+1}\right)^2$.

Перейдем к исследованию подмногообразия M. Если $\left\{\omega^1,\cdots,\omega^m,\omega^{m+1},\omega^{m+2}\right\}$ – двойственный репер к выбранному выше ортонормальному адаптированному реперу, то на подмногообразии M имеем

$$\omega^\alpha=0,\ \omega_i^\alpha=\lambda_i^\alpha\omega^i\,, \tag{1}$$

$$d\lambda_i^\alpha\delta_{ij}+\lambda_i^\beta\delta_{ij}\omega_\beta^\alpha+\left(\lambda_j^\alpha-\lambda_i^\alpha\right)\omega_j^i=h_{ijk}^\alpha\omega^k\,. \tag{2}$$

В этих формулах по индексу i нет суммирования. (В дальнейшем будем придерживаться следующего соглашения: если некоторый индекс содержится в левой и правой частях формулы, то по этому индексу суммирование не производится). Для того чтобы из формулы (2) получить ряд условий, необходимых в дальнейшем, индексам будем придавать различные значения.

Если в (2) $i = a, j = b, a \neq b$, то в силу независимости форм ω^k, получим $h^{\alpha}_{abk} = 0$.

Если в (2) положить $i = r,\ j = s$ и учесть, что $\lambda^{\alpha}_{r} = \lambda^{\alpha}_{s} = 0$, то будем иметь $h^{\alpha}_{rsk} = 0$.

Пусть в (2) $i = a, j = p+1$. В этом случае

$$\left(\lambda^{\alpha}_{p+1} - \lambda^{\alpha}_{a}\right)\omega^{a}_{p+1} = h^{\alpha}_{aa(p+1)}\omega^{a} + h^{\alpha}_{a(p+1)(p+1)}\omega^{p+1} + h^{\alpha}_{a(p+1)r}\omega^{r}.$$

Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$, в силу $\lambda^{m+1}_{p+1} = \lambda^{m+1}_{a}$, получим

$$h^{m+1}_{aa(p+1)} = h^{m+1}_{a(p+1)(p+1)} = h^{m+1}_{a(p+1)r} = 0,$$

$$\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{a}_{p+1} = h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^{a} + h^{m+2}_{a(p+1)(p+1)}\omega^{p+1} + h^{m+2}_{a(p+1)r}\omega^{r}.$$

Если в (2) положить $i = a,\ j = r$, то будем иметь $\lambda^{\alpha}_{a}\omega^{a}_{r} = -h^{\alpha}_{aar}\omega^{a} - h^{\alpha}_{ar(p+1)}\omega^{p+1}$. Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$, в силу $\lambda^{m+2}_{a} = 0$, получим $h^{m+2}_{aar} = h^{m+2}_{ar(p+1)} = 0$, $\lambda^{m+1}_{a}\omega^{a}_{r} = -h^{m+1}_{aar}\omega^{a}$.

Если в (2) положить $i = j = a$, а затем $i = j = b,\ b \neq a$, то будем иметь

$$d\lambda^{\alpha}_{a} + \lambda^{\beta}_{a}\omega^{\alpha}_{\beta} = h^{\alpha}_{aaa}\omega^{a} + h^{\alpha}_{aa(p+1)}\omega^{p+1} + h^{\alpha}_{aar}\omega^{r},$$

$$d\lambda^{\alpha}_{b} + \lambda^{\beta}_{b}\omega^{\alpha}_{\beta} = h^{\alpha}_{bbb}\omega^{a} + h^{\alpha}_{bb(p+1)}\omega^{p+1} + h^{\alpha}_{bbr}\omega^{r}.$$

Поскольку в этих равенствах левые части равны, то, приравнивая правые части и учитывая независимость форм ω^{a}, ω^{p+1}, ω^{r}, получим $h^{\alpha}_{aaa} = 0,\ h^{\alpha}_{aa(p+1)} = h^{\alpha}_{bb(p+1)},\ h^{\alpha}_{aar} = h^{\alpha}_{bbr},\ a \neq b$. Тогда первая из предыдущих формул будет иметь следующий вид:

$$d\lambda^{\alpha}_{a} + \lambda^{\beta}_{a}\omega^{\alpha}_{\beta} = h^{\alpha}_{aa(p+1)}\omega^{p+1} + h^{\alpha}_{aar}\omega^{r}.$$

Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$ имеем соответственно

$$d\lambda^{m+1}_{a} = h^{m+1}_{aar}\omega^{r}, \quad \lambda^{m+1}_{a}\omega^{m+2}_{m+1} = h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^{p+1}.$$

Если (2) положить $i = j = p+1$, то получим

$$d\lambda^{\alpha}_{p+1} + \lambda^{\beta}_{p+1}\omega^{\alpha}_{\beta} = h^{\alpha}_{(p+1)(p+1)a}\omega^{a} + h^{\alpha}_{(p+1)(p+1)(p+1)}\omega^{p+1} + h^{\alpha}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{r}.$$

Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$ приходим к следующим равенствам:

$$d\lambda^{m+1}_{p+1} + \lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{m+1}_{m+2} = h^{m+1}_{(p+1)\,(p+1)\,(p+1)}\omega^{p+1} + h^{m+1}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{r},$$

$$d\lambda^{m+2}_{p+1} + \lambda^{m+1}_{p+1}\omega^{m+2}_{m+1} = h^{m+2}_{(p+1)(p+1)a}\omega^{a} + h^{m+2}_{(p+1)(p+1)(p+1)}\omega^{p+1} + h^{m+2}_{(p+1)(p+1)r}\omega^{r}.$$

Поскольку $\lambda_{p+1}^{m+1} = \lambda_{a}^{m+1}$, то, подставляя в первое из этих равенств значения $d\lambda_{a}^{m+1}$ и ω_{m+2}^{m+1} из предыдущих равенств, получим следующие соотношения:

$$h_{aar}^{m+1} = h_{(p+1)(p+1)r}^{m+1}, \quad \frac{h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{m+1}}{\lambda_{p+1}^{m+2}} = -\frac{h_{aa(p+1)}^{m+2}}{\lambda_{a}^{m+1}}.$$

Подставляя во второе равенство значение ω_{m+1}^{m+2}, приходим к соотношению

$$d\lambda_{p+1}^{m+2} = h_{(p+1)(p+1)a}^{m+2}\omega^{a} + \left(h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{m+2} - h_{aa(p+1)}^{m+2}\right)\omega^{p+1} + h_{(p+1)(p+1)r}^{m+2}\omega^{r}.$$

Полагая в (2) $i = r, j = p+1$, будем иметь $\lambda_{p+1}^{\alpha}\omega_{p+1}^{r} = h_{(p+1)(p+1)r}^{\alpha}\omega^{p+1}$. Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$ получим $\lambda_{a}^{m+1}\omega_{p+1}^{r} = h_{(p+1)(p+1)r}^{m+1}\omega^{p+1}$, $\lambda_{p+1}^{m+2}\omega_{p+1}^{r} = h_{(p+1)(p+1)r}^{m+2}\omega^{p+1}$. Следовательно,

$$\frac{h_{(p+1)(p+1)r}^{m+1}}{\lambda_{a}^{m+1}} = \frac{h_{(p+1)(p+1)r}^{m+2}}{\lambda_{p+1}^{m+2}}.$$

Поскольку все возможные случаи исчерпаны, то в итоге имеем

$$\lambda_{r}^{\alpha} = \lambda_{a}^{m+2} = h_{rsk}^{\alpha} = h_{aa(p+1)}^{m+1} = h_{a(p+1)(p+1)}^{m+1} = h_{abk}^{\alpha} = 0,\ a \neq b,$$

$$h_{a(p+1)r}^{m+1} = h_{a(p+1)r}^{m+2} = h_{aar}^{m+2} = h_{aaa}^{\alpha} = 0,$$

$$h_{aa(p+1)}^{\alpha} = h_{bb(p+1)}^{\alpha},\ a \neq b, \quad h_{aar}^{\alpha} = h_{bbr}^{\alpha},\ a \neq b, \quad h_{aar}^{m+1} = h_{(p+1)(p+1)r}^{m+1},$$

$$\frac{h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{m+1}}{\lambda_{p+1}^{m+2}} = -\frac{h_{aa(p+1)}^{m+2}}{\lambda_{a}^{m+1}}, \quad \frac{h_{(p+1)(p+1)r}^{m+1}}{\lambda_{a}^{m+1}} = \frac{h_{(p+1)(p+1)r}^{m+2}}{\lambda_{p+1}^{m+2}}.$$

На основании проведенных вычислений также можем составить следующую дифференциальную систему:

$$d\lambda_{a}^{m+1} = h_{aar}^{m+1}\omega^{r}, \quad d\lambda_{p+1}^{m+2} = h_{(p+1)(p+1)a}^{m+1}\omega^{a} + \left(h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{m+2} - h_{aa(p+1)}^{m+2}\right)\omega^{p+1} + h_{(p+1)(p+1)r}^{m+2}\omega^{r},$$

$$\lambda_{p+1}^{m+2}\omega_{p+1}^{a} = h_{aa(p+1)}^{m+2}\omega^{a} + h_{a(p+1)(p+1)}^{m+2}\omega^{p+1}, \quad \lambda_{a}^{m+1}\omega_{a}^{r} = h_{aar}^{m+1}\omega^{a},$$

$$\lambda_{a}^{m+1}\omega_{m+1}^{m+2} = h_{aa(p+1)}^{m+2}\omega^{p+1}, \quad \lambda_{a}^{m+1}\omega_{p+1}^{r} = h_{(p+1)(p+1)r}^{m+1}\omega^{p+1}, \quad \omega_{r}^{\alpha} = \omega_{a}^{m+2} = 0.$$

Если ввести обозначения

$$F_{r} = \frac{h_{aar}^{m+1}}{\lambda_{a}^{m+1}},\ A = \frac{h_{aa(p+1)}^{m+2}}{\lambda_{p+1}^{m+2}},\ B = \frac{h_{(p+1)(p+1)(p+1)}^{m+2}}{\lambda_{p+1}^{m+2}},$$

$$G_{a} = \frac{h_{(p+1)(p+1)a}^{m+2}}{\lambda_{p+1}^{m+2}},\ D = \frac{h_{aa(p+1)}^{m+2}}{\lambda_{a}^{m+1}} = \frac{\lambda_{(p+1)}^{m+2}}{\lambda_{a}^{m+1}}A,$$

то приведенную выше дифференциальную систему можем преобразовать к виду

$$d\ln\left|\lambda_{a}^{m+1}\right| = F_{r}\omega^{r}, \quad d\ln\left|\lambda_{p+1}^{m+2}\right| = G_{a}\ \omega^{a} + \left(B-A\right)\omega^{p+1} + F_{r}\omega^{r},$$
$$\omega_{p+1}^{\alpha} = A\omega^{a} + G_{a}\omega^{p+1}, \quad \omega_{a}^{r} = F_{r}\omega^{a}, \tag{3}$$
$$\omega_{m+1}^{m+2} = D\omega^{p+1}, \quad \omega_{p+1}^{r} = F_{r}\omega^{p+1}, \quad \omega_{r}^{\alpha} = \omega_{a}^{m+2} = 0.$$

Приступим к описанию подмногообразия M. Рассмотрим дифференциальную систему $\omega^{\alpha} = 0, \omega^{p+1} = 0, \omega^{r} = 0$, которая задает распределение $T^{(n_1)}$. Поскольку $d\omega^{\alpha} = 0, d\omega^{p+1} = 0, d\omega^{r} = 0$, то распределение $T^{(n_1)}$ интегрируемо. В силу $\omega_{a}^{\alpha} = \lambda_{a}^{\alpha}\omega^{a},\ \omega_{a}^{p+1} = -A\omega^{a},\ \omega_{a}^{r} = F_{r}\omega^{a}$, интегральное многообразие является вполне омбилическим, т.е. представляет собой сферу (т.к. $\lambda_{a}^{m+1} \neq 0$) размерности p, которую будем обозначать через $S^{p}\left(R\right)$.

Дифференциальная система $\omega^{\alpha} = 0, \omega^{a} = 0, \omega^{r} = 0$ задает распределение $T^{(n_2)}$. Легко проверить, что $d\omega^{\alpha} = 0, d\omega^{a} = 0, d\omega^{r} = 0$. Следовательно, это распределение интегрируемо, и поскольку оно одномерно, то его интегральное многообразие представляет собой кривую, которую будем обозначать через L.

Распределение $T^{(0)}$, задаваемое системой $\omega^{\alpha} = 0, \omega^{a} = 0, \omega^{p+1} = 0$, также интегрируемо, и в силу $\omega_{r}^{\alpha} = \omega_{r}^{a} = \omega_{r}^{p+1} = 0$, его интегральное многообразие представляет собой плоскость размерности μ, которую будем обозначать через E_{μ}.

Рассмотрим теперь дифференциальную систему $\omega^{\alpha} = 0, \omega^{r} = 0$, которая задает распределение $T^{(n_1)} + T^{(n_2)}$, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ прямую сумму $T_{x}^{(n_1)} + T_{x}^{(n_2)}$. Это распределение фактически совпадает с распределением кодефектности $T^{(1)}$. Поскольку $d\omega^{\alpha} = 0, d\omega^{r} = 0$, то распределение $T^{(1)}$ интегрируемо. Его интегральное многообразие будем обозначать через $\tilde{M}$. Из формул $\omega_{a}^{r} = F_{r}\omega^{a}$, $\omega_{p+1}^{r} = F_{r}\omega^{p+1}$ следует, что $\tilde{M}$ является вполне омбилическим подмногообразием в M. Согласно результатам работы [4], $\tilde{M}$ является эйнштейновым, а само подмногообразие M изометрично или цилиндру над $\tilde{M}$, или цилиндру с $\left(\mu-1\right)$-мерными плоскими образующием над конусом, построенным над $\tilde{M}$. Ниже решается задача существования и геометрического описания такого цилиндра и конуса.

Дифференцируя внешним образом первое и четвертое уравнения системы (3) и применяя лемму Картана, получим соответственно

$$\begin{gathered} dF_{r} - F_{s}\omega_{r}^{s} = F_{rs}\omega^{s},\ F_{rs} = F_{sr}, \\ dF_{r} - F_{s}\omega_{r}^{s} = F_{r}F_{s}\omega^{s}. \end{gathered}, \tag{4}$$

Следовательно, $F_{rs} = F_r \cdot F_s$, и мы будем рассматривать только уравнение (4).

Рассмотрим подмногообразие $\tilde{M}$. На этом подмногообразии $T^{\perp}\left(M\right)$ и $T^{(0)}$, как подрасслоения нормального расслоения, являются параллельными в силу $\omega_r^{\alpha} = 0$. Из выражений для $\omega_a^{\alpha}, \omega_{p+1}^{\alpha}, \omega_a^{r}, \omega_{p+1}^{r}$ (см. (1)) следует, что в направлениях e_{α} и e_r матрицы второй фундаментальной формы подмногообразия $\tilde{M}$ имеют диагональный вид. Это значит, что нормальная связность подмногообразия $\tilde{M}$ плоская. Тогда, в силу параллельности $T^{\perp}\left(M\right)$ и $T^{(0)}$ в нормальном расслоении подмногообразия $\tilde{M}$, в них индуцируются плоские нормальные связности. Это значит, что в $T^{(0)}$, как в подрасслоении нормального расслоения подмногообразия $\tilde{M}$, векторы e_r можем выбрать так, чтобы они были параллельными. Поскольку при $\omega^r = 0$, т.е. на $\tilde{M}$, векторное поле $\eta = \sum\limits_r F_r e_r$ также является параллельным (это следует из (4)), то вектор e_m можем выбрать так, чтобы он был коллинеарен вектору η. Тогда $\eta = F_m e_m$, $F_r = 0$ при $r \neq m$. Из (4) при $r \neq m$ следует, что $F_m \omega_s^m = 0$. Следовательно, мы должны рассматривать два случая:

(а) $F_m = 0$,

(б) $F_m \neq 0$, $\omega_s^m = 0$.

Рассмотрим случай (а). Пусть $F_m = 0$. Тогда $\omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0$, и, следовательно, распределения $T^{(1)} = T^{(n_1)} + T^{(n_2)}$ и $T^{(0)}$ параллельны на M. Поскольку они сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M, то M является прямым произведением их интегральных многообразий, т.е. $M = \tilde{M} \times E_{\mu}$.

Выясним, что представляет собой $\tilde{M}$ в случае, когда в системе (3) $G_a = 0$. Поскольку, кроме того, $\lambda_a^{m+1} = const \neq 0$, то из системы (3) для $\tilde{M}$ получаем следующую систему:

$$d\ln\left|\lambda_{p+1}^{m+2}\right| = \left(B - A\right)\omega^{p+1}, \quad \omega_{p+1}^{a} = A\omega^{a}, \quad \omega_{m+1}^{m+2} = D\omega^{p+1}, \quad \omega_a^{m+2} = 0. \qquad (5)$$

Поскольку $d\omega^{p+1} = 0$, то $\omega^{p+1} = dx^{p+1}$, где x^{p+1} – координата по кривой L. Заметим, что в (5) коэффициент A должен быть отличен от нуля, поскольку в противном случае - подмногообразие $\tilde{M}$ будет прямым произведением сферы $S^p\left(R\right)$ и кривой L, и тогда индекс дефектности $\tilde{M}$ будет отличен от нуля. Дифференцируя внешним образом второе уравнение системы (5) , применяя лемму Картана и учитывая независимость формы ω^a, получим $dA = -\left(\left(\lambda_a^{m+1}\right)^2 + A^2\right)\omega^{p+1}$. Интегрируя это уравнение, приходим к следующим соотношениям:

$$A=\lambda_a^{m+1}tg\left(c_1-\lambda_a^{m+1}x^{p+1}\right),\ D=\lambda_{p+1}^{m+2}tg\left(c_1-\lambda_a^{m+1}x^{p+1}\right),$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Из первого уравнения системы (5) имеем $\lambda_{p+1}^{m+2}=c_2e^{\int(B-A)dx^{p+1}}$, где $c_2(\neq 0)$ — постоянная интегрирования. Дифференцируя внешним образом первое уравнение системы (5), получим $dB=\tilde{B}\omega^{p+1}$. Следовательно, B также является функцией от x^{p+1}.

Поскольку внешнее дифференцирование остальных уравнений системы (5) к новым соотношениям не приводит, то приступим к изучению кривой L. Так как на этой кривой $\omega^\alpha=0,\ \omega^a=0$, то для векторов $e_{p+1},\ e_{m+1},\ e_{m+2}$ имеем

$$de_{p+1}=\left(\lambda_a^{m+1}e_{m+1}+\lambda_{p+1}^{m+2}e_{m+2}\right)\omega^{p+1}=n_2\omega^{p+1},\ \ de_{m+1}=\left(De_{m+2}-\lambda_a^{m+1}e_{p+1}\right)\omega^{p+1},$$

$$de_{m+2}=\left(-De_{m+1}-\lambda_{p+1}^{m+2}e_{p+1}\right)\omega^{p+1}.$$

Следовательно, кривая L находится в трёхмерном пространстве. Более того, из первого равенства следует, что вектор $n=\dfrac{n_2}{\left|n_2\right|}$ выступает в качестве единичного вектора главной нормали кривой L, а кривизна кривой L равна $\left|n_2\right|$. Теперь легко видеть, что единичным вектором бинормали кривой L служит вектор

$$\tilde{b}=\frac{1}{\left|n_2\right|}\left(-\lambda_{p+1}^{m+2}e_{m+1}+\lambda_a^{m+1}e_{m+2}\right).$$

Формулы Френе кривой L имеют следующий вид:

$$\frac{de_{p+1}}{dx^{p+1}}=\left|n_2\right|n,\quad \frac{dn}{dx^{p+1}}=-\left|n_2\right|e_{p+1}+(D+\frac{\lambda_a^{m+1}}{\left|n_2\right|^2}\frac{d\lambda_{p+1}^{m+2}}{dx^{p+1}})\tilde{b},$$

$$\frac{d\tilde{b}}{dx^{p+1}}=-(D+\frac{\lambda_a^{m+1}}{\left|n_2\right|^2}\frac{d\lambda_{p+1}^{m+2}}{dx^{p+1}})n.$$

Если $B=A$, что равносильно условию $\lambda_{p+1}^{m+2}=const(\neq 0)$ или $\left|n_2\right|=const(\neq 0)$, то в этом случае

$$\frac{de_{p+1}}{dx^{p+1}}=\left|n_2\right|\cdot n,\quad \frac{dn}{dx^{p+1}}=-\left|n_2\right|e_{p+1}+Db,\quad \frac{db}{dx^{p+1}}=-Dn.$$

Из этих соотношений следует, что при $B=A$ кривая L имеет постоянную кривизну, а её кручение равно D.

Поскольку $\rho=\left|n_1\right|^2-<n_1,H>=\left|n_2\right|^2-<n_2,H>=-p\left(\lambda_a^{m+1}\right)^2$, то подмногообразие $\tilde{M}$ имеет отрицательную эйнштейнову константу. Условие $<n_1,n_2>=\left|n_1\right|^2$ равносильно тому, что секционные кривизны $k\left(e_a\wedge e_{p+1}\right)$ положительны и постоянны.

Последнее следует из того, что $\left|n_1\right|^2 = \left(\lambda_a^{m+1}\right)^2 = const$. Если $B = A$, то $\left|n_2\right|$ также является постоянным, а n_2 образует с n_1 постоянный острый угол. Если $B \neq A$, то из условия $\left|n_1\right|^2 = < n_1, n_2 >$ следует, что $\left|n_1\right| = \left|n_2\right|\cos\varphi$ (φ - угол между векторами n_1 и n_2), и, следовательно, постоянными, является произведение $\left|n_2\right|\cos\varphi$. Вектор $\lambda_a^{m+1}e_{m+1} - Ae_{p+1}$ является вектором средней кривизны сферы $S^p\left(R\right)$. Следовательно, $R^2 = \left(\left(\lambda_a^{m+1}\right)^2 + A^2\right)^{-1}$. Подставляя значение A и преобразуя его, получим

$$R = \left|\frac{\cos\left(c_1 - \lambda_a^{m+1}x^{p+1}\right)}{\lambda_a^{m+1}}\right|.$$

Таким образом, радиус R изменяется вдоль кривой L. Следовательно, подмногообразие $\tilde{M}$ мы можем трактовать как каналовое подмногообразие.

Пусть λ_a^{m+1} – произвольная ненулевая постоянная, а λ_{p+1}^{m+2}, A, D определяются таким же образом, как и выше, где B – произвольная гладкая функция от x^{p+1}, и, кроме того, $\omega^{p+1} = dx^{p+1}$. В евклидовом пространстве E_{p+3} рассмотрим следующую дифференциальную систему:

$$\omega^{m+1} = \omega^{m+2} = 0, \quad \omega_{m+1}^{m+2} = D\omega^{p+1}, \quad \omega_a^{m+1} = \lambda_a^{m+1}\omega^a,$$
$$\omega_{p+1}^{m+1} = \lambda_a^{m+1}\omega^{p+1}, \quad \omega_a^{m+2} = 0, \quad \omega_{p+1}^{m+2} = \lambda_{p+1}^{m+2}\omega^{p+1}, \quad \omega_{p+1}^a = A\omega^a.$$

Путем прямого вычисления легко проверить, что эта система вполне интегрируема. Она и задает подмногообразие $\tilde{M}$. Итак, в рассматриваемом случае подмногообразие M является прямым произведением эйнштейнова каналова подмногообразия $\tilde{M}$ и плоскости L_μ. Отметим, что если $B = 0$, то

$$\lambda_{p+1}^{m+2} = \frac{c_2}{\left|\cos\left(c_1 - \lambda_a^{m+1}x^{p+1}\right)\right|}.$$

Рассмотрим, теперь случай (б), когда в системе (3) $F_m \neq 0$, $F_r = 0$, $r \neq m$, $\omega_s^m = 0$. Кроме того, предположим также, что $G_a = 0$. Тогда система (3) принимает следующий вид:

$$d\ln\left|\lambda_a^{m+1}\right| = F_m\omega^m, \ d\ln\left|\lambda_{p+1}^{m+1}\right| = \left(B - A\right)\omega^{p+1} + F_m\omega^m,$$
$$\omega_{p+1}^a = A\omega^a, \ \omega_a^m = F_m\omega^a, \ \omega_{m+1}^{m+2} = D\omega^{p+1}, \qquad (6)$$
$$\omega_{p+1}^m = F_m\omega^{p+1}, \ \omega_r^\alpha = \omega_a^{m+2} = 0, \ \omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0, r \neq m.$$

Поскольку $\omega_s^m = 0$, $\omega_a^r = \omega_{p+1}^r = 0, \quad r \neq m$, то распределение N, сопоставляющее каждой точке $x \in M$ линейную оболочку векторов $e_{p+2}, \cdots, e_{m-1}$, является параллельным на M. Ортогональное дополнение N, т.е. распределение $T^{(n_1)} + T^{(n_2)} + K$, где $K -$ одномерное распределение, образуемое прямой с направляющим вектором e_m, также является параллельным на M. Поскольку эти распределения сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M, то M разлагается в прямое произведение их интегральных многообразий. Интегральное многообразие распределения N представляет собой $(\mu - 1)$-мерную плоскость $E_{\mu-1}$. Интегральное многообразие распределения $T^{(n_1)} + T^{(n_2)} + K$ представляет собой $(p+2)$-мерное подмногообразие, которое будем обозначать через M'. Поскольку $de_m = -F_m\left(\omega^a e_a + \omega^{p+1} e_{p+1}\right)$, то вектор e_m является постоянным при $\omega^a = \omega^{p+1} = 0$. Отсюда следует, что M' является конусом (с исключенной точечной вершиной) над $\tilde{M}$. Далее, полагая в (6.4) $r = m$, получим $dF_m = F_m^2 \omega^m$. Поскольку $d\omega^m = 0$, то можем полагать $\omega^m = dx^m$, где $x^m -$ координата на образующей конуса с единичным вектором e_m. Решая это уравнение, получим $F_m = \dfrac{1}{c_3 - x^m}$. Из первого уравнения системы (6) имеем $\lambda_a^{m+1} = \dfrac{c_4}{c_3 - x^m}$, $c_4 \neq 0$. Дифференцируя внешним образом третье уравнение системы (6) и учитывая независимость формы ω^a, приходим к уравнению

$$dA = -\left(A^2 + \frac{c_4^2 + 1}{\left(c_3 - x^m\right)^2}\right)\omega^{p+1}.$$

Это уравнение будем интегрировать вдоль кривой L, т.е. будем предполагать, что координата x^m фиксирована. Тогда $\omega^m = dx^m = 0$ и, как легко проверить, $d\omega^{p+1} = 0$. Следовательно, $\omega^{p+1} = dx^{p+1}$, где $x^{p+1} -$ координата на кривой L. В результате интегрирования находим

$$A = \frac{\sqrt{c_4^2 + 1}}{c_3 - x^m}\, tg \frac{c_5 - \sqrt{c_4^2 + 1}\, x^{p+1}}{c_3 - x^m}.$$

Дифференцируя внешним образом второе уравнение системы (6), приходим к выводу, что при фиксированном значении x^m B является произвольной функцией от x^{p+1}. Из второго уравнения системы (6) находим

$$\lambda_{p+1}^{m+2} = c_6 e^{\int (B-A) dx^{p+1}}, \quad c_6 \neq 0 .$$

Учитывая связь между D и A, получаем

$$D = \frac{c_6}{\lambda_a^{m+1}}\, A\, e^{\int (B-A) dx^{p+1}} .$$

В полученных формулах c_3, c_4, c_5, c_6 являются постоянными интегрирования. Непосредственно можно проверить, что при фиксированном значении x^m, т.е. при фиксированной точке на образующей K, уравнения $\omega^{m+1}=0$, $\omega^{m+2}=0$, $\omega^m=0$ совместно с уравнениями системы (6) образуют вполне интегрируемую дифференциальную систему, которая и задает эйнштейново подмногообразие $\tilde{M}$ коразмерности три. Подмногообразие M представляет собой прямое произведение конуса над $\tilde{M}$ и плоскости размерности $\mu-1$, т.е. $M=C^{p+2}\times E_{\mu-1}$, где $C^{p+2}-$ конус над $\tilde{M}$.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть тензор Риччи m-мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M индекса дефектности μ евклидова пространства E_{m+2} допускает только одно ненулевое собственное значение и этому собственному значению соответствуют только два линейно независимых главных вектора кривизны n_1, n_2 с кратностями p_1, p_2 соответственно. Тогда μ совпадает с индексом относительной дефектности, а само M или локально является подмногообразием кодефектности два (если $p_1=p_2=1$), или оно изометрично цилиндру с μ-мерными плоскими образующими над некоторым эйнштейновым подмногообразием $\tilde{M}$ либо цилиндру с ($\mu-1$)-мерными плоскими образующими над конусом, построенному над $\tilde{M}$ (если $p_1\geq 2,\ p_2=1$). Подмногообразие $\tilde{M}$ можно трактовать как каналовое подмногообразие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lumiste Ü. *Semiparallel submanifolds in space forms*.- New York: Springer, 2009.- 306 p.
2. Мирзоян В.А. *Структурные теоремы для римановых Ric- полусимметрических пространств* // Изв. Вузов. Математика. - 1992. - № 6. - С. 80-89.
3. Мирзоян В.А. *Классификация Ric-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах* // Матем. сб. – 2000. - 191, № 9. – С. 65-80.
4. Мирзоян В.А. *Скрещенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric-полупараллельных подмногообразий* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2003. - 67, № 5. – С. 107-124.
5. Мирзоян В.А. *Структурные теоремы для Ric-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий* // Матем. сб. – 2006. - 197, № 7. – С. 47-76.
6. Мирзоян В.А. *Классификация одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с интегрируемым распределением кодефектности* // Матем. сб. – 2008. - 199, № 3. – С. 69-94.
7. Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С. *Нормально плоские минимальные полуэйнштейновы подмногообразия с однократными главными векторами кривизны* // Докл. НАН Армении. – 2009. - 109, № 2. – С. 119-125.

8. Мирзоян В.А. *Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах* // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2011. - 75, № 6. – С. 47-78.
9. Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С. *О нормально плоских Ric – полусимметрических подмногообразиях в евклидовых пространствах* // Изв.вузов.Матем. - 2012. -№ 9. -С. 19-31.
10. Mirzoyan V.A. *General classification of normally flat Ric -semisymmetric submanifolds* // National Acad. Sci. of Armenia. Reports. – 2012. - 112, № 1. – P. 19-29.
11. Szabo Z.I. *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R = 0$. I. The local version* // J.Differential Geom. – 1982. - 17, № 4. – P. 531-582.
12. Chern S.S., Kuiper N. *Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Eudlidean Space* // Ann. of. Math. – 1952. - 56, № 3. -P. 422-430.

Материал поступил в редакцию 25.01.2016.

ԵՐԿՈՒ ԿՈՉԱՓԻ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՐԹ ՌԻՉՉԻ-ԿԻՍԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Վ.Ա. Միրզոյան, Ա.Ռ. Նազարյան

Էվկլիդեսյան տարածություններում տրվում է երկու կոչափի նորմալ հարթ ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը այն պայմանի դեպքում, որ ռեգուլյարության ինդեքսը հավասար է երկուսի, իսկ սինգուլյարության ինդեքսը՝ զրոյի: Մանրամասն ուսումնասիրվում է էյնշտեյնյան ենթաբազմաձևությունների մի դաս, որոնք մեկնաբանվում են որպես կանալային ենթաբազմաձևություններ:

Առանցքային բառեր. ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ, կոներ, էյնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ:

ON THE GEOMETRY OF A CLASS OF NORMALLY FLAT RICCI-SEMISYMMETRIC SUBMANIFOLDS OF CODIMENTION TWO IN EUCLIDEAN SPACES

V.A. Mirzoyan, A.R. Nazaryan

A geometric description of a class of normally flat Ricci semi-symmetric submanifolds of codimension two with zero singularity index and regularity index two in Euclidean spaces is done. The class of Einstein submanifolds which are canal submanifolds is investigated in detail.

Keywords: Ricci-semisymmetric submanifolds, cones, Einstein submanifolds.