УДК 517. 948

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОГРУЖЕНИЯ В E^3 ОДНОГО КЛАССА M_1 БЕСКОНЕЧНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Р.Ц. Мусаелян
(Горисский государственный университет)
E-mail: rubmus49@gmail.com

В полной метрике $ds^2 = dx^2 + \left(e^{-x} + b(y)\right)^2 dy^2$ отрицательной кривизны рассматриваются бесконечные многоугольники (далее БМ) определенного класса. Существование двух классов БМ в метрике более общего вида, чем в указанной выше, доказано в работе [1]. Основным результатом этой работы является следующая теорема: в указанной выше метрике любой бесконечный многоугольник из класса M_1 регулярно изометрически погружается в E^3.

Ключевые слова: метрика, погружение, производная, кривизна, геодезические линии.

1°. Формулировка теоремы. Пусть полная метрика отрицательной гауссовой кривизны задана посредством линейного элемента

$$ds^2 = dx^2 + \left(e^{-x} + b\left(y\right)\right)^2 dy^2. \tag{1}$$

Пусть далее функция $b\left(y\right) > 0$ для любого $y \epsilon \left(-\infty;\infty\right)$ принадлежит в указанной области классу $C^{4.1} -$ ограниченных функций. Отметим, что класс $C^{4.1} -$ заданные на прямой ограниченные функции вместе с производными до 4-го порядка и точными константами Липшица для производных 4-го порядка. Из этого предположения следует, что кривизна $K\left(x,y\right)$ метрики (1) удовлетворяет условию

$$-1 < K\left(x,y\right) < 0. \tag{2}$$

Теорема 1. В метрике (1) любой БМ из класса M_1 регулярно изометрически погружается в E^3.

Отметим,что БМ - это выпуклое множество в указанной метрике, граница которого состоит из геодезических линий. Вершины БМ находятся на абсолюте. Что касается класса M_1, то это БМ, для каждого из которых можно указать отвечающий ему орицикл О такой, что нижняя грань длин ортогональных проекций сторон БМ на указанный орицикл О положительна (см.[1]).

1°. Вспомогательные результаты. Система уравнений теории поверхностей, известная как система уравнений Петерсона-Кодации и Гаусса (см.[2]), в случае, когда кривизна метрики $K(x,y) < 0$, превращается в следующую основную систему (см.[3]):

$$\begin{aligned} r_x + s r_y &= A_0 + A_1 r + A_2 s + A_3 r^2 + A_4 rs + A_5 r^2 s, \\ s_x + r s_y &= A_0 + A_1 s + A_2 r + A_3 s^2 + A_4 rs + A_5 r s^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Коэффициенты $A_i(x, y)$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ системы (3) в заданной метрике - вполне определенные функции.

Пусть коэффициенты $A_i(x, y)$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ основной системы в некоторой полосе $\Pi_a = \{0 \leq x \leq a, -\infty < x < +\infty\}$ (значение $a = +\infty$ не исключается) принадлежат классу $c^{1,1}$- ограниченных функций. Считается также, что начальные данные этой системы $\{r_0(y), s_0(y)\} \in c^{1,1}$ на оси оу. При этих условиях справедливо следующее утверждение, доказательство которого приведено в работе [3].

Теорема 2 (Теорема существования и единственности). В некоторой полосе $\Pi_{h_1}, h_1 \leq a$ существует единственное решение $\{r(x, y), s(x, y)\} \in c^{1,1}$ системы (3) с начальными данными $\{r_0(y), s_0(y)\} \in c^{1,1}$ на оси оу.

Лемма 1. Пусть начальные данные на оси оу удовлетворяют неравенству

$$0 < 2\delta \leq |r_0(y) - s_0(y)|, \delta = const.$$

Тогда в некоторой после Π_{h_2}, $h_2 \leq h_1$ (h_1 – число, гарантированное теоремой существования и единственности) решение $\{r(x, y), s(x, y)\}$ основной системы удовлетворяет условию

$$\delta \leq |r(x, y) - s(x, y)|.$$

Доказательство этой леммы также приведено в работе [3]. Для ширины h_2 полосы Π_{h_2} может быть указана оценка снизу, зависящая от коэффициентов основной системы $A_i(x, y)$ $(i = 0, 1, 2, \dots, 5)$ и от начальных данных.

Далее будем пользоваться результатом Оссермана (см.[4]). Согласно этому результату, если кривизна полной двумерной метрики ограничена сверху отрицательной константой, то метрика конформно отображается на круг, границу которого назовем абсолютом. Если кривизна $K(x, y)$ метрики удовлетворяет следующему интегральному условию:

$$\frac{\iint_{Д} K d\sigma}{\iint_{Д} d\sigma} \leq -\varepsilon < 0, \tag{4}$$

то можно считать $K(x, y) < 0$. Не ограничивая общности, можно предположить, что Д в метрике (1) представляет собой квадрат с центром в начале координат со стороной 2d. Несложные вычисления приводят (4) к следующему неравенству:

$$\frac{-1}{1 + \frac{A^*}{shd}} \leq -\varepsilon, \tag{5}$$

где $A^* = -\int_{-d}^{d} b(y) dy$. Неравенство (5) выполняется, если знаменатель - ограниченная величина. Это с учетом ограниченности $b(y)$ ведет к ограниченности величин $\frac{d}{shd}$. Ограниченность последнего очевидна. Таким образом, для метрики (1) теорема Оссермана применима.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $БМ \epsilon M_1$ и h - любое положительное число. Среди орициклов, эквидистантных О, можно указать такой орицикл O_t, который отсекает все вершины БМ, причем если H_i – любая вершина БМ и ξ_i - прямая, соединяющая $H \, c \, H_i$, то эквидистантная полоса с базой ξ_i и шириной 2h содержит часть БМ, отсеченную орициклом O_t и содержащую H_i.

Доказательство. По определению класса M_1, для каждого $БМ\epsilon M_1$ существует орицикл О, на котором проектируются стороны БМ, причем точная нижняя грань длины проекции положительна $inf\{длин(P_iP_j)\} > 0$. Это значит что существует орицикл O_*, эквидистантный к O, такой, что все стороны БМ, за исключением тех, которые в рассматриваемой метрике описываются уравнением $y = const$, находятся по одну сторону относительно орицикла. В уравнении геодезических в метрике (1) (см. [5], формулы (15)) вне орикруга, границей которого является орицикл O_*, коэффициенты - определенные положительные величины. С другой стороны, по теореме 3 (см. [5]) для каждой стороны БМ существует отвечающее ей число ν_1 такое, что в плоскости Лобачевского кривизны $-\nu_1^2$ (плоскость $Л_{\nu_1}$) существует мажорантное уравнение. Обозначим множество $\nu = \{\nu_1^i\}$ всех чисел ν_1, отвечающих каждой стороне $БМ\epsilon M_1$, где i пробегает счетное множество I. Покажем, что $\inf\limits_{i\epsilon I}\{\nu_1^i\} = \nu_{11} > 0$. Отметим, что сторона $БМ\epsilon M_1$ в плоскости $Л_\nu$, имеет вид

$$y = \pm\frac{1}{2\nu}\sqrt{c_1 - e^{2\nu x} +}\ c_2. \qquad (6)$$

Если учесть, что эта прямая имеет на оси оу проекцию длины d_1, то для параметров c_1 и c_2 получим

$$c_1 = \frac{\nu^2(p_i - p_j)}{4} = \frac{\nu^2 d_1^2}{4}, \qquad c_2 = \frac{(p_i + p_j)}{2}, \qquad (7)$$

где p_i и p_j – основания проекции на оси оу. Если обратиться к неравенствам (24) работы [5], а также к формулам (6) и (7) этой работы и определению класса M_1 (т.е. $inf\{длин(p_i,\ p_j)\} > 0$), то нетрудно заключить, что $inf\{\nu_1\} = \nu_{11} > 0$. Очевидно также, что можно выбрать $\widetilde{\varepsilon_0}$ в формуле (26) работы [5] так, чтобы любой $\varepsilon\epsilon(0, \widetilde{\widetilde{\varepsilon_0}})$, *где* $\widetilde{\widetilde{\varepsilon_0}} \leq \widetilde{\varepsilon_0}$, был пригоден для сторон БМ в плоскости $Л_{\nu_{11}}$. Если ввести в формулах (6) и (7) параметр ε так, как это сделано в формуле (29) работы [5], то для плоскости $Л_{\nu_{11}}$ числа t_1, ν_{11}, d_1 будут связаны соотношением

$$t_1 = \frac{1}{\nu_{11}}\ln\frac{d_1\nu_{11}}{2\varepsilon}. \qquad (8)$$

Далее, если $|t|$ - расстояние в метрике (1) между осью оу и стороной $БМ\epsilon M_1$, длина проекции которой на оси оу равна d_1, то очевидно, $|t| < |t_1|$. По определению, $d_1 > 0$ для БМ. Это значит,что $|t_0| = sup\{|t_1|\}$ конечно. Если взять орициклы O_t, где $|t| > |t_0|$, то все они будут удовлетворять требованию леммы.

Теперь покажем, что длины частей O_t, отсекающих вершины H_i, равномерно стремятся к нулю при $|t| \to \infty$. Если обозначить длины отрезков, о которых говорится, через $\eta(x, d_1)$, то получим

$$\eta(x, d_1) \leq \frac{1}{\nu_{11}} e^{-x}\left(\frac{-\varepsilon}{\nu_{11}}\sqrt{\frac{\nu_{11}^2 d_1^2}{4\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon^2}e^{2\nu_{11}x} +\ \frac{d_1}{2}}\right). \qquad (9)$$

Правая часть неравенства (9) - это выражение, показывающее длины дуг орициклов, заключенных между геодезическими линями $y = \xi_i = const$ и $y = \lambda_{11}(x)$ (см. в [5] формулу (29)) в плоскости $Л_{\nu_{11}}$. Правая часть (9), очевидно, равномерно стремится к нулю при $x \to -\infty$. Теперь нетрудно указать такое число t_h , что при всех $t \geq t_h$ каждый орицикл O_t будет удовлетворять требованиям леммы. Лемма доказана.

3°. Доказательство теоремы 1. По известной теореме (см. [6]), если метрика удовлетворяет условию $|B_x(x,y)| < C$, где $B(x,y)$ - функция метрики в полугеодезических координатах, то она изометрически погружается в E^3 в виде регулярной поверхности. Более того, можно выписать параметрические уравнения реализации. Применяя эту теорему для метрики (1), заключаем, что в той части, где выполняется вышеприведенное условие, часть метрики регулярно изометрически погружается в E^3. Отметим, что с помощью замен переменных (параллельный перенос) можно добиться погружения орикруга, содержащего в себе другой, наперед заданный.

Обозначим бесконечно удаленную точку орикруга через H. Все прямые ξ_i орикруга, проходящие через H, параллельны между собой. Пусть ξ- один из лучей, принадлежащих этим прямым. Пусть xoy - полугеодезическая система координат, положительная полуось oy которой совпадает с полупрямой $\tilde{\xi}$ (граничная точка $\tilde{\xi}$- начало координат), а линии x - геодезические, ортогональные оси оу. На оси оу возьмем сегмент $[y_0, y_1]$, где $0 < y_0 < y_1$. В этом сегменте угловые коэффициенты осимптотических линий в метрике, очевидно, будут иметь вид

$$r_0(y) = \frac{k_0(y)\sqrt{1-e^{-2y}}}{e^{-y}}, \quad s_0(y) = -r_0(y). \tag{10}$$

Напомним, что $k_0(y) = k(o,y), k = \sqrt{-K(x,y)}$, а $K(x,y) -$ кривизна метрики (1). Продолжим теперь эти функции на всю ось оу так, чтобы полученные после продолжения функции $\widetilde{r_0}(y)$ и $\widetilde{s_0}(y)$ (совпадающие на сегменте $[y_0, y_1]$ соответственно с $r_0(y)$ и $s_0(y)$) принадлежали классу $C^{1.1}$ и на оси оу выполнялось неравенство $|\widetilde{r_0}(y) - \widetilde{s_0}(y)| \geq 2\delta$, где $\delta = const$.

Запишем основную систему для указанной полугеодезической системы координат. По теореме существования и единственности (см [3]), начальные данные $\{\widetilde{r_0}(y),\ \widetilde{s_0}(y)\}$ определяют решение этой системы в некоторой полосе. По лемме 1, в некоторой полосе, ширина которой не превосходит ширины, гарантированной теоремой, решение удовлетворяет условию $|\tilde{r}(x,y) - \tilde{s}(x,y)| \geq \delta > 0$. Пусть это будет полоса $П_{h_1} = \{0 \leq x \leq h_1, -\infty < y < +\infty\}$. Полученное справедливо и для полосы $П_{-h_1} = \{-h_1 \leq x \leq 0, -\infty < x < +\infty\}$. Таким образом, погружена эквидистантная полоса ширины $2h_1$ с базой ξ. В малой окрестности отрезка $[y_0, y_1]$ асимптотическая сеть в погруженной части совпадает с аналогичной сетью, ранее погруженной. Следовательно, можно указать число $h \leq h_1$ такое, что в указанной окрестности можно построить криволинейный четырехугольник, ограниченный отрезками d_1, d_2 двух орициклов O_1 и O_2, эквидистантных данному орициклу O (предположим, что $O_1 \supset O_2$). Рассмотрим в метрике (1) фигуру, полученную присоединением к орикругу O_1 той части ($ЭП_{2h}$) (эквидистантная полоса ширина $2h$), которая отсекается отрезком d_1 и лежит вне O_1. Эта фигура регулярно изометрически погружается в E^3.

Пусть имеется конечное или счетное множество прямых $\{\xi_i\}$, проходящих через точку H. Точки пересечения этих прямых с орициклом O_1 образуют на нем конечное или счетное множество точек. Будем предполагать, что точная нижняя грань расстояний между этими точками по дуге орицикла O_1 положительна. Очевидно, вышеуказанное число $h > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы части (ЭП) с базой ξ_i и шириной $2h$, присоединенные к орикругу $\widetilde{O_1}$ таким образом, как это было сделано при получении вышеуказанной фигуры, не пересекались. Это значит, что в фигуре, полученной таким образом, в целом существует асимптотическая сеть. Значит, эта фигура регулярно изометрически погружается в E^3.

Обратимся к $БМ \in M_1$. Пусть $\{O_t\}$ - множество орициклов, выбранных по числу h и обладающих свойством, указанным в лемме 2. Построим прямые ξ_i, соединяющие бесконечно удаленную точку H орициклов $\{O_t\}$ с вершинами данного $БМ \in M_1$. Выберем такой орицикл O_t из указанного множества, чтобы части $(ЭП)_{2h}$ с базами ξ_i и шириной $2h$, присоединенные к орикругу $\widetilde{O_t}$ так, как это было сделано выше, не пересекались. Так как метрика задана в полосе $П_{\tilde{a}} = \{0 \le x \le \tilde{a}, -\infty < y < \infty\}$ в виде (1), то линии x-геодезические, и поэтому число $\tilde{h} \le \tilde{a}$, равное ширине полосы $П_{\tilde{h}} = \left\{0 \le x \le \tilde{h}, -\infty < y < \infty\right\}$ в параметрической плоскости, равно также ширине соответствующей полосы в метрике (1). Поэтому полученная таким образом фигура покрывает данный $БМ \in M_1$. Это значит, что БМ регулярно изометрически погружается в E^3 в виде поверхности. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусаелян Р.Ц. *О некомпактных областях в метриках отрицательной кривизны* // Учен. записки Арцах. унив.-2016.-1.
2. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. *Дифференциальная геометрия. Первое знакомство*.- М., 1990.
3. Позняк Э.Г. *О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны.* - Укр. геометр. сборник.- 1966.- 3.
4. Osserman R. *On the inequality* $\Delta u \geq \mathfrak{f}(u)$ // Pacif. J. Math.- 1957.- 7.- P. 1641-1647.
5. Мусаелян Р.Ц. *Мажорантные уравнения в метрике* $ds^2 = dx^2 + \left(e^{-x} + b(y)\right)^2 dy^2$ // Математика в высшей школе.- 2015.- Т.11, N 3.- С. 38-44.
6. Мусаелян Р.Ц. *О регулярном погружении в целом в* E^3 *некоторых полных метрик знакопеременной кривизны* // АН АрмССР.- 1981.- LXXIII.

Материал поступил в редакцию 09.03.2016.

M_1 ԴԱՍԻՆ ՊԱՏԿԱՆՈՂ ԱՆՎԵՐՋ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՆԿՂՄԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ E^3-ՈՒՄ

Ռ.Ծ. Մուսայելյան

Դիտարկվում են բացասական կորությամբ լրիվ $ds^2 = dx^2 + \left(e^{-x} + b(y)\right)^2 dy^2$ մետրիկայում անվերջ բազմանկյուններ՝ պատկանող որոշակի դասի: Այդպիսի 2 դասերի

բազմանկյունների գոյությունն ավելի ընդհանուր մետիկայում, քան դիտարկվողը, ապացուցված է [1] աշխատանքում: Այս աշխատանքի հիմնական արդյունքը հետևյալ թեորեմն է. վերը նշված մետրիկայում ցանկացած անվերջ բազմանկյուն, պատկանող M_1 դասին, ռեգուլյար, իզոմետրիկ ընկղմվում է E^3-ում:

Առանցքային բառեր. մետրիկա, ընկղմում, ածանցյալ, կորություն, գեոդեզիկական գծեր:

IMMERSION OF INFINITE POLYGONALS INFO E^3 BELONGIG TO SLASS M_1

R. Ts. Musaelyan

Infinite polygonals belonging to sertain slass in $ds^2 = dx^2 + \left(e^{-x} + b(y)\right)^2 dy^2$ complete metrie of negative curvature is considered. The existence of polnonals of thrse tuo ckasses in a more general metric than the one being observed is proved in the work (1). The general result of this work is the following theorem. In the obove mentioned metric any infinite polonal belonging bo class M_1 immerses info E^3 in regular, isometrie way.

Keywords: metrika, immersion, derivative, curvature, geodesic line.