УДК 517.7.53

МНОЖЕСТВО ТОЧЕК ЖЮЛИА ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ ЭКВИМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ПО КАСАТЕЛЬНЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ

М.М. Мирзоян, А.Н. Айрапетян
(Армянский государственный экономический университет)
E-mail: ani.mirzoyan91@gmail.com, arkady.hayrapetyan@mail.ru

Для нормальных в смысле Монтеля [1,2] и эквиморфных [3] в круге функций доказывается теорема о точках Жюлиа [4].

Ключевые слова: предельные множества, нормальные эквиморфные функции, множество точек Жюлиа.

Пусть $D:|z|<1$ - единичный круг; $\Gamma:|z|=1$ - единичная окружность; Ω - сфера Римана. В работе Х. Э. Мехия [3] функция $f:D\to\Omega$ названа эквиморфной функцией, если f есть композиция $f(z)=g(h(z))$ некоторой мероморфной функции $g(z)$ в круге D и эквиморфизма $h:\ D\to D$, т.е. такого гомеморфизма круга D на себя, что h, h^{-1} равномерно непрерывны относительно гиперболической метрики единичного круга [1].

Пусть $\xi=e^{i\varphi}\in\Gamma$. Для произвольных действительных чисел α и q, $0<\alpha<\infty$, $q\geq 0$ назовем правым q-путем $L^{+}(\xi,q,\alpha)$ всякую кривую, которая задается непрерывной на $[0;1)$ функцией $z=z(t)$ со свойствами:

$\lim\limits_{t\to1} z(t)=\xi$; $\left|z(t)-\xi\right|<\dfrac{1}{2}$; $\theta<\arg z(t)<\theta+\dfrac{\pi}{6}$, $\arg z(t)\to 0$ (монотонно) при $t\to 1$ и

$$\lim_{t\to1}\left(1-\left|z(t)\right|\right)\left|\arg z(t)-\theta\right|^{-q-1}=\alpha .$$

Назовем правым q^{*}-путем $L^{+}\left(\xi,q^{*},\alpha\right)$ правый q-путь, задающийся уравнением

$$z=\left[1-\alpha\left(\varphi-\theta\right)^{q+1}\right]e^{i\varphi},\ \varphi\in\left(\theta;\theta+\alpha^{-\frac{1}{1+q}}\right] .$$

Обозначим через $L^{-}(\xi,q,\alpha)$ ($L^{-}(\xi,q^{*},\alpha)$), $0<\alpha<\infty, q\geq 0$ и назовем левым q-путем (q^{*}-путем) образ правого q-пути $L^{+}(\xi,q,\alpha)$ ($L^{+}(\xi,q^{*},\alpha)$) при симметрии относительно радиуса $h(\xi,0)$ круга D в точке $\xi=e^{i\varphi}\in\Gamma$. Правые и левые q-пути (q^{*}-пути) назовем q-путями (q^{*}-путями) $L(\xi,q,\alpha)$ ($L(\xi,q^{*},\alpha)$) или просто $L(\xi,q)$ ($L(\xi,q^{*})$).

Для произвольных $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$ назовем $\left(q_1, q_2\right)$-углом $\left(\left(q_1, q_2\right)^*\right)$ в точке $\xi \in \Gamma$ и обозначим через $\Delta\left(\xi, \alpha, \beta, q_1, q_2, \delta\right)$ ($\Delta^*\left(\xi, \alpha, \beta, q_1, q_2, \delta\right)$) или просто $\Delta\left(\xi, q_1, q_2\right)$ ($\Delta^*\left(\xi, q_1, q_2\right)$), если нас не интересуют размеры этого угла, подобласть круга D, ограниченную двумя разными $L\left(\xi, q_1, \alpha\right)$ ($L\left(\xi, q_1^*, \alpha\right)$) и $L\left(\xi, q_2, \beta\right)$ ($L\left(\xi, q_2^*, \beta\right)$) путями (возможен случай $q_1 = q_2$) и окружностью $\left|z - \xi\right| = \delta$, где δ - достаточно малое положительное число.

Пусть Z - произвольное топологическое пространство. Для произвольного отображения f круга D в Z, $f : D \to Z$ произвольной точки $\xi \in \Gamma$ и произвольного множества $S \subset D$, для которого ξ является предельной точкой, предельное множество $C\left(f, \xi, S\right)$ определяется как пересечение

$$C\left(f, \xi, S\right) = \bigcap_{r>0} \overline{f\left(V_r\left(\xi\right) \cap S\right)}, \text{ где } V_r\left(\xi\right) = \left\{z \in D; \left|z - \xi\right| < r\right\}, r > 0$$

и черта замыкания множества.

Следуя В.И. Гаврилову [4], последовательность точек $\left\{z_n\right\}, z_n \in D, n = 1, 2, \ldots$, $\lim_{n\to\infty}\left|z_n\right| = 1$ называют P-последовательностью для произвольной функции $f : D \to \Omega$, если для любой бесконечной подпоследовательности $\left\{z_{n_\nu}\right\}$ и любого $\varepsilon > 0$ функция $f\left(z\right)$ принимает в объединении неэвклидовых кругов $D\left(z_{n_\nu}, \varepsilon\right) = \left\{z \in D; \sigma\left(z, z_{n_\nu}\right) < \varepsilon\right\}$ бесконечно часто каждое значение $\omega \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений.

Пусть f - произвольная функция $f : D \to \Omega$ и A - произвольное конечное множество неотрицательных чисел. Жорданову кривую K_ξ, лежащую в круге D и оканчивающуюся в точке $\xi \in \Gamma$, назовем линией Жюлиа для функции $f\left(z\right)$, если при любом $\varepsilon > 0$ на множестве

$$D\left(K_\xi, \varepsilon\right) = \bigcup_{\alpha \in K_\xi} D\left(\alpha, \varepsilon\right)$$

функция $f\left(z\right)$ принимает бесконечно часто каждое значение $\omega \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $J_A\left(f\right)$ и назовем точкой Жюлиа [5], если любой q-путь $L\left(\xi, q\right), q \in A$ является линией Жюлиа для $f\left(z\right)$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству точек Плеснера $I_A\left(f\right)$, если для любого $\left(q_1, q_2\right)$ - угла $\Delta\left(\xi, q_1, q_2\right), q_1, q_2 \in A$ имеем

$$C\left(f, \xi, \Delta\left(\xi, q_1, q_2\right)\right) = \Omega .$$

Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $I^*_A(f)$, если каждый q-путь $L(\xi,q)$, $q \in A$ не содержит ни одной P-последовательности функции $f(z)$ и для любого q-пути $L(\xi,q), q \in A$ имеем $C(f,\xi,L(\xi,q)) = \Omega$. Ясно, что для произвольной функции $f(z): D \to \Omega$ множества $J_A(f)$ и $I^*_A(f)$ являются подмножествами множества $I_A(f)$.

Произвольная функция $f: D \to \Omega$ называется нормальной в D, если она образует нормальное (в смысле Монтеля [1]) семейство $\{f(S(z))\}$, где $S(z)$ обозначает произвольное конформное отображение круга D на себя. Если $f(z)$ - нормальная функция в круге D, то семейство функции $\{f_\alpha(z)\}$:

$$f_\alpha(z) = f\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{a}z}\right),\ \alpha \in D, \tag{1}$$

в котором α пробегает все точки круга D, является нормальным в смысле Монтеля в D. Носиро [2] называет функцию $f(z)$ нормальной функцией первого рода, если все предельные функции семейства (1) отличны от тождественных постоянных.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Для произвольной эквиморфной и нормальной первого рода функции f, определенной в круге D, $f: D \to \Omega$, и для произвольного конечного множества A неотрицательных чисел множество $J_A(f)$ является подмножеством множества $I^*_A(f)$.

Доказательство. Пусть $\xi \in \Gamma$ - произвольная точка из $J_A(f)$ и $L(\xi,q), q \in A$ - произвольный фиксированный q-путь. Согласно лемме 1 из [6], для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой (q,q)-угол $\Delta(\xi,q,q)$ и такое $\delta, 0 < \delta < \frac{1}{2}$, что

$$L(\xi,q) \subset \{z; |z-\xi| < \delta\} \subset \Delta(\xi,q,q) \subset \{z \in D; \sigma(z; L(\xi,q)) < \varepsilon\}.$$

Так как $\xi \in J_A(f)$, то в (q,q)-углу $\Delta(\xi,q,q)$ функция $f(z)$ принимает каждое значение $\omega \in \Omega$ бесконечно часто, кроме, быть может, двух значений. Следовательно, функция $f(z)$ на множестве $\{z \in D; \sigma(z; L(\xi,q)) < \varepsilon\}$ принимает бесконечно часто каждое значение $\omega \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений, т.е. q-путь $L(\xi,q)$ является линией Жюлиа для $f(z)$. Тогда имеем $C(f,\xi,L(\xi,q)) = \Omega$. С другой стороны, каждый q-путь $L(\xi,q), q \in A$ не может содержать ни одной P - последовательности, так как нормальная эквиморфная функция в D не имеет P - последовательностей (см. [3], теорема 3). Следовательно, $\xi \in I^*_A(f)$, и теорема доказана.

Отметим, что в случае, когда $A = \{0\}$ и f - мероморфная функция в D, теорема доказана в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Lehto O., Virtanen K. I. *Boundary behavior and normal meromorphic functions//* Acta math.- 1957.- V. 97, N 1-2.- P. 47-65.
2. Noshiro K. *Contributions to the theory of meromorphic functions in the unit circle //* J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.- 1938.- V. 7.- P. 149-159.
3. Мехия Х. Э. *Граничные свойства эквиморфных функций //* ДАН СССР.- 1982.- Т. 265, N 1.- С. 35-38.
4. Гаврилов В. И. *Об одной теореме Картрайт и Коллингвуда, касающейся классификации и распределения особенностей мероморфных функций на границе //* Вестник МГУ.- 1976.- N 4.- С. 36-43.
5. Ефремович В. А. *Геометрия близости //* Матем. сб.- 1952.- Т. 31 (73), N 1.- С. 189-200.
6. Мирзоян М. М. *О теоремах максимальности для произвольных и мероморфных функций по касательным направлениям //* ДАН АрмССР.- 1978.- Т. 66, N 4.- С. 200-204.

Материал поступил в редакцию 09.02.2016.

ԺՅՈՒԼԻԱՅԻ ԿԵՏԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆՈՐՄԱԼ ԵՎ ԷԿՎԻՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻԱՎՈՐ ՇՐՋԱՆՈՒՄ ՇՈՇԱՓՈՂ ՈՒՂՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ

Մ.Մ. Միրզոյան, Ա.Ն. Հայրապետյան

Միավոր շրջանում նորմալ [1], [2] և էկվիմորֆ [3] ֆունկցիաների համար ապացուցվում է թեորեմ Ժուլիայի [4] կետերի բազմության վերաբերյալ:

Առանցքային բառեր. սահմանային բազմություններ, նորմալ էկվիմորֆ ֆունկցիաներ, Ժյուլիայի կետերի բազմություն:

OF THE SET OF JULIA'S POINTS FOR NORMAL AND EQUIMORPHIC FUNCTIONS IN THE UNIT DISC ALONG TANGENTIAL DIRECTIONS

M.M. Mirzoyan, A.N. Hayrapetyan

For normal [1] and equimorphic [3] functions in the unit disc it is proven theorem of Julias points $J_A(f)$ [4].

Keywords: cluster sets, normal equimorphic functions, Julia's points.