УДК 517.7.53

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАДИУСЕ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ НА СЧЕТНЫХ ГРУППАХ

С.М. Нариманян, Т.З. Хачикян
(Ереванский государственный университет)

Приведен ряд условий, обеспечивающих равенство спектрального радиуса единице для симметричных случайных блужданий на счетных группах.

Ключевые слова: случайное блуждание, спектральный радиус, аменабельная группа, нильпотентная группа, разрешимая группа.

1°. Пусть X_n - однородная марковская цепь со счетным фазовым пространством E и n-шаговыми переходными вероятностями $p(n,x,y)$, $x,y \in E$. В дальнейшем всюду предполагается, что рассматриваемые цепи неприводимы и непериодичны. Для таких цепей известно, что найдется такое n_0, что при $n > n_0$ $p(n,x,x) > 0$, $x \in E$ (см. [1]).

Теорема 1. Если цепь X_n неприводима и непериодична, то существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n,x,y)}$ и не зависит от x и y.

Обратную величину этого предела обозначим через ρ и назовем спектральным радиусом цепи X_n.

Доказательство. Из уравнения Колмогорова-Чепмена следует, что для любого $x \in E$:

$$p(m+n,x,x) \geq p(m,x,x)\,p(n,x,x).$$

Теперь воспользуемся следующей известной задачей из математического анализа (см. [2]): пусть числовая последовательность a_n $(n=1,2,\ldots)$ удовлетворяет условию

$$0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n \quad (m,n=1,2,\ldots).$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ существует.

Отсюда, учитывая вышеуказанное неравенство, немедленно получим, что

$$\sqrt[n]{p(n,x,x)} \to A(x),\ n \to \infty.$$

Если m фиксирована, то $\sqrt[n]{p(m+n,x,x)} \to A(x)$, $n \to \infty$. Из неприводимости цепи X_n следует, что существуют такие m и s, что $p(m,x,y) > 0, p(s,y,x) > 0$. Ясно, что

$$p\left(m+n+s,x,x\right)\geq p\left(m,x,y\right)\cdot p\left(n,y,y\right)\cdot p\left(s,y,x\right).$$

Извлечем n-й корень из обеих частей последнего неравенства и совершим предельный переход при $n\to\infty$. Тогда получим, что $A\left(x\right)\geq A\left(y\right)$. Но совершенно аналогично можно показать, что $A\left(y\right)\geq A\left(x\right)$. Таким Образом, мы получили, что для любых $x,y\in E$ $A\left(x\right)=A\left(y\right)$. Следовательно, $A\left(x\right)=A=const$. Теперь докажем, что для любых $x,y\in E$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}=A.$$

Действительно, выберем такое m, что $p\left(m,x,y\right)>0,$ и запишем очевидное неравенство:

$$p\left(n,x,y\right)\geq p\left(m,x,y\right)\cdot p\left(n-m,y,y\right).$$

Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}\geq A.$$

Теперь выберем такое s, что $p\left(s,y,x\right)>0$, и запишем очевидное неравенство:

$$p\left(n+s,x,x\right)\geq p\left(n,x,y\right)\cdot p\left(s,y,x\right).$$

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}\leq A.$$

Таким образом, мы получили, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}=\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}=A.$$

А это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p\left(n,x,y\right)}=A.$$

2°. Начиная с этого момента будем считать, что множество состояний E цепи X_n является группой с единицей e. Если переходные вероятности удовлетворяют условию $p\left(x,y\right)=p\left(e,x^{-1}y\right)$ (тогда, конечно, $p\left(gx,gy\right)=p\left(x,y\right)$ для любого $g\in E$), то говорят, что цепь X_n инвариантна слева. Инвариантные марковские цепи с фазовым пространством E будем называть случайными блужданиями на группе E. Случайное блуждание называется симметричным, если $p\left(e,x\right)=p\left(e,x^{-1}\right)$ для любого $x\in E$. Дадим такое определение (см. [3]).

Определение. Группа E называется аменабельной, если для любого симметричного случайного блуждания на E его спектральный радиус $\rho=1$.

Приведем ряд условий, обеспечивающих равенство $\rho=1$ для симметричных блужданий, заданных на счетных группах.

Лемма 1. Пусть $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ - счетная группа. Если всякая подгруппа $E_n \subset E$, порожденная множеством $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, аменабельна, то группа E аменабельна.

Действительно, пусть $p(e, x)$ - переходные вероятности некоторого симметричного блуждания X_n на E и $\varepsilon > 0$. Применим метод урезания: выберем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таким образом, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} p\left(e, x_i^{\pm 1}\right) = 1 - \varepsilon_1 > 1 - \varepsilon,$$

и рассмотрим случайное блуждание Y_n на E_n с переходными вероятностями

$$q\left(e, x_i^{\pm 1}\right) = \left(1 - \varepsilon_1\right)^{-1} p\left(e, x_i^{\pm 1}\right).$$

Заметим, что

$$p\left(n, e, e\right) \geq \left(1 - \varepsilon_1\right)^{n} q\left(n, e, e\right).$$

Отсюда, учитывая, что Y_n - симметричное случайное блуждание на аменабельной группе E_n, получим

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{p\left(n, e, e\right)} \geq \left(1 - \varepsilon_1\right) \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{q\left(n, e, e\right)} = 1 - \varepsilon_1 > 1 - \varepsilon .$$

Теперь, в силу произвольности ε, спектральный радиус цепи X_n равен 1, т.е. E - аменабельная группа.

Лемма 2. Если для любого финитного симметричного случайного блуждания на группе E его спектральный радиус равен 1, то это верно и для любого (необязательно финитного) симметричного случайного блуждания на E.

Доказательство можно провести методом урезания, подобно лемме 1.

Леммы 1 и 2 сводят задачу об общих симметричных случайных блужданиях на произвольных счетных группах к случаю финитных симметричных блужданий и групп с конечным числом образующих.

Пусть теперь E - группа с конечным числом образующих: $a_1, a_2, \ldots, a_v$. Тогда любой элемент $g \in E$ можно представить в виде

$$g = a_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \ldots a_{\alpha_k}^{\varepsilon_k},\ \varepsilon_i = \pm 1, 1 \leq \alpha_i \leq v .$$

Обозначим через $N_E(n)$ число элементов группы E, представимых в вышеуказанном виде словами длины не более n. Функция $N_E(n)$ называется функцией роста группы E. Заметим, что

$$N_E(n + m) \leq N_E(n) \cdot N_E(m),$$

и поэтому, используя упомянутую в пункте 1 известную задачу из математического анализа, получим, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{N_E(n)}=r(E)\geq 1,$$

$r(E)$ называется спектральным показателем группы E.

Лемма 3. Если спектральный показатель $r(E)=1$, то группа E аменабельна.

Действительно, пусть X_n - некоторое симметричное случайное блуждание на группе E. В силу леммы 2, можно считать, что X_n - финитное случайное блуждание. Тогда имеем

$$p(2n,e,e)=\sum_{|x|\leq cn}p(n,e,x)\,p(n,x,e)=$$

$$=\sum_{|x|\leq cn}\left(p(n,e,x)\right)^2\geq\frac{1}{\sum\limits_{|x|\leq cn}1}\left(\sum_{|x|\leq cn}\left(p(n,e,x)\right)\right)^2=\frac{1}{N_E(cn)}.$$

Здесь $|x|$ - длина элемента x, а $c>0$ - некоторая константа. Отсюда следует, что спектральный радиус случайного блуждания X_n равен 1. Значит, группа E аменабельна.

Следствие. Счетные абелевы группы аменабельны.

В самом деле, в силу леммы 1, можно ограничиться группами с конечным числом образующих. Но если E-абелева группа и $a_1,a_2,\ldots,a_v$ - ее образующие, то $N_E(n)\leq(2n)^v$. Остается сослаться на лемму 3.

Лемма 4. Если H - аменабельный нормальный делитель группы E и фактор-группа E/H аменабельна, то группа E аменабельна.

Доказательство. Пусть X_n - некоторое симметричное случайное блуждание на E. В силу аменабельности фактор - группы E/H, имеем: для любого $\varepsilon>0$

$$p(n,e,H)\geq(1-\varepsilon)^n$$

для достаточно больших n. Здесь

$$p(n,e,H)=\sum_{h\in H}p(n,e,h).$$

Пусть n_0 - одно из таких чисел и $X_{n_0}\in H$. Если Q - условное распределение на H при условии, что $X_{n_0}\in H$, то Q является симметричным респределением и

$$p(kn_0,e,e)\geq(1-\varepsilon)^{kn_0}\,q(k,e,e).$$

Отсюда, в силу аменабельности нормального делителя $H,$ получим

$$\sqrt[kn_0]{p(kn_0,e,e)}\to 1,k\to\infty.$$

Таким образом, по подпоследовательности $\{kn_0\}$ последовательность $\sqrt[n]{p(n,e,e)}$ имеет предел, равный 1. Значит, она стремится к 1 (так как предел самой последовательности существует).

Следствие. Счетные нильпотентные и разрешимые группы аменабельны.

Действительно, поскольку нильпотентная группа является также разрешимой, то достаточно доказать аменабельность разрешимых групп. Пусть E - разрешимая группа ранга n. Доказательство проведем индукцией по n. Если $n=1$, то E является абелевой группой. Значит, в силу следствия леммы 3, группа E аменабельна. Предположим, что для всех $k<n$ утверждение леммы верно, и докажем его для n. Заметим, что коммутант группы E является разрешимой группой ранга $n-1$, а фактор-группа по коммутанту есть абелева группа. Остается применить лемму 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А. В. *Введение теории случайных процессов.*- М.: Наука, 1977.
2. Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа, Том.1.*- М.: Наука, 1978.
3. Нариманян С.М. *Некоторые эргодические теоремы для цепей Маркова и случайных последовательностей:* Автореф. дис. канд. физ.-мат. Наук// МГУ.- М, 1980.

Материал поступил в редакцию 17.03.2016.

ՀԱՇՎԵԼԻ ԽՄԲԵՐԻ ՎՐԱ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԹԱՓԱՌՈՒՄՆԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՇԱՌԱՎՂԻ ՄԱՍԻՆ

Ս.Մ. Նարիմանյան, Տ.Զ. Խաչիկյան

Ներկայացված են մի շարք պայմաններ, որոնց առկայության դեպքում հաշվելի խմբերի վրա սիմետրիկ պատահական թափառումների սպեկտրալ շառավիղը հավասար է մեկի:

Առանցքային բառեր. պատահական թափառում, սպեկտրալ շառավիղ, ամենաբելային խումբ, նիլպոտենտ խումբ, թույլատրելի խումբ:

ON SPECTRAL RADIUS OF RANDOM WALKS ON COUNTABLE GROUPS

S.M. Narimanyan, T.Z. Khachikyan

For symmetric random walks on countable groups sufficient conditions for equality of the spectral radius of unit are obtained.

Keywords: random walk, spectral radius, amenable group, nilpotent group, permissible group.