УДК 517.7.53

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВУХ КЛАССОВ НОРМАЛЬНО ПЛОСКИХ РИЧЧИ-ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Р. Назарян

(Национальный политехнический университет Армении**)**

E-mail: aram.nazaryan@gmail.com

Даётся геометрическое описание нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два с двумя ненулевыми собственными значениями тензора Риччи в евклидовых пространствах. Рассматриваются нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия с одним регулярным и одним ненулевым сингулярным главными векторами кривизны.

Ключевые слова: риччи-полусимметрические подмногообразия, прямые произведения, цилиндры и конусы над римановыми многообразиями.

1°. Введение. Пусть $M -$ риманово многообразие с тензором Риччи R_1 и операторами кривизны $R(X,Y)$, где $X,Y -$ произвольные векторные поля на M. Если $R(X,Y)R_1 = 0$ для любых $X,Y,$ то тензор R_1 называется полупараллельным, а само многообразие M называется риччи-полупараллельным или риччи-полусимметрическим. Риччи-полусимметрические многообразия являются естественными обобщениями симметрических, эйнштейновых, полусимметрических многообразий и римановых многообразий с параллельным тензором Риччи (см. [1-3] и цитированную в них литературу). Общая классификация римановых риччи-полусимметрических многообразий была получена в [2]. В теории риччи-полусимметрических многообразий и их изометрических погружений одной из актуальных задач является задача их геометрического описания. Различные классы риччи-полусимметрических подмногообразий были исследованы в [3-10].

Настоящая работа посвящена исследованию и геометрическому описанию двух классов нормально плоских риччи-полусимметрических подмногообразий коразмерности два.

2°. Риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два с двумя ненулевыми собственными значениями тензора Риччи. Пусть m -мерное нормально плоское подмногообразие M в E_n является риччи-полусимметрическим и имеет коразмерность $n-m=p=2$ и пусть $W^{(0)},W^{(1)},W^{(2)} -$ группы г.в.к., которые отвечают различным собственным значениям тензора Риччи R_1 (определение групп

$W^{(\sigma)}$ см. в [8,9]). Известно [8], что ни одна из групп $W^{(1)}, W^{(2)}$ не может содержать однократного вектора, ортогонального остальным векторам этой же группы.

Пусть число ненулевых собственных значений $\rho_1, \ldots, \rho_t$ тензора R_1 равно коразмерности подмногообразия, т.е. $t = 2$. Тогда группа $W^{(0)}$, отвечающая нулевому собственному значению тензора Риччи R_1, может состоять только из нулевого г.в.к., и, следовательно, $i_S = \mu - \nu = 0$, где i_S обозначает индекс сингулярности. Каждая из групп $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ содержит либо только один кратный вектор, либо два коллинеарных вектора (см. [8,9]), которые также могут иметь кратности. Пусть группы $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ отвечают собственным значениям ρ_1, ρ_2 тензора Риччи R_1 (на основании вышесказанного, собственные значения ρ_1, ρ_2 должны иметь кратности два и более). Тогда соответствующие собственные подпространства $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ тензора R_1 будут инвариантны относительно операторов кривизны $R(X,Y)$ (подробности см. в [2,10]). Продолжая подпространства $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ методом З. Сабо [11] (процедура подробно описана в [2] при доказательстве теоремы 3.1), можем построить параллельные распределения $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$ такие, что $\Delta_1(x) \subseteq \tilde{\Delta}_1(x)$, $\Delta_2(x) \subseteq \tilde{\Delta}_2(x)$ (здесь важно отметить, что расширение подпространств $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ происходит только за счёт $T_x^{(0)}$, которое в настоящем случае совпадает с собственным подпространством тензора Риччи R_1, соответствующим нулевому собственному значению). Покажем, что распределения $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2. Действительно, в [5] в ходе доказательства теоремы 2.5 было доказано, что если распределение дефектности $T^{(0)}$ нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия является омбилическим относительно любого нормального векторного поля, то распределения $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$ сопряжены относительно формы α_2. Поскольку в рассматриваемом случае $\mu = \nu$, то подпространство $T_x^{(0)}$ в каждой точке $x \in M$ совпадает с T_x', и указанное выше условие омбиличности $T^{(0)}$ относительно любого нормального векторного поля выполняется. Таким образом, распределения $\tilde{\Delta}_1$, $\tilde{\Delta}_2$ параллельны в римановой связности на M и сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2. Следовательно, согласно критерию приводимости (см. [1,5]), подмногообразие M разлагается в общем случае в прямое произведение двух риччи-полусимметрических гиперповерхностей и некоторой плоскости (которая представляет собой оставшуюся часть от $T_x^{(0)}$). Разумеется, что структура этого произведения существенно зависит от размерности распределения $T^{(0)}$. Например, если

$\mu = \nu = 0$, то распределения Δ_1, Δ_2 будут совпадать соответственно с распределениями $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2$. В этом случае подмногообразие M разлагается в прямое произведение двух эйнштейновых (но не риччи-плоских) гиперповерхностей.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием коразмерности $p = 2$ евклидова пространства E_n. Если число различных ненулевых собственных значений тензора Риччи равно коразмерности, т.е. двум, то их кратности ≥ 2, индексы дефектности и относительной дефектности совпадают, а само подмногообразие M разлагается в прямое произведение двух риччи-полусимметрических гиперповерхностей и некоторой плоскости (возможно, нулевой размерности).

В евклидовых пространствах *риччи*-полусимметрические гиперповерхности геометрически описываются следующей теоремой.

Теорема 2 ([3]). В евклидовом пространстве E_{m+1} гиперповерхность M удовлетворяет условию $R(X,Y)R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда она является открытой частью одного из следующих подмногообразий:

(а) гиперсферы S^m в E_{m+1};

(б) гиперконуса вращения C^m в E_{m+1};

(в) произведения $S^n \times E_{m-n}$, где S^n - гиперсфера в E_{n+1}, а E_{m-n} – $(m-n)$-мерная плоскость, $n = 2,\dots,m-1$;

(г) произведения $C^n \times E_{m-n}$, где C^n - гиперконус вращения в E_{n+1}, а E_{m-n} – $(m-n)$- мерная плоскость, $n = 2,\dots,m-1$;

(д) гиперповерхности ранга ≤ 2;

(е) полуэйнштейновой гиперповерхности K^m в E_{m+1}, $m \geq 5$, которая несет ортогональную сопряженную систему, состоящую из двух сфер: $S^p\left(r_1\right)$, $p \geq 2$ и $S^q\left(r_2\right)$, $q \geq 2$ и прямой L, и представляет собой конус с (прямая L в качестве образующей) над прямым произведением $S^p\left(r_1\right) \times S^q\left(r_2\right)$, которое является эйнштейновым подмногообразием в E_{m+1} и принадлежит гиперсфере $S^m\left(r\right) \subset E_{m+1}$;

(ж) произведения $K^n \times E_{m-n}$, где K^n – полуэйнштейнова гиперповерхность в E_{n+1}, описываемая, как и K^m, в п. (е), а E_{m-n} – $(m-n)$ - мерная плоскость, $n = 5,\dots,m-1$.

Эта теорема дает полную локальную классификацию риччи-полусимметрических гиперповерхностей в евклидовых пространствах. Некоторые уточнения и дополнения к доказательству были сделаны в [6].

Размерность подмногообразия M, удовлетворяющего условиям теоремы 1, очевидно, ≥ 4, причём если $\dim M = 4$, то $\mu = \nu = 0$. Руководствуясь теоремами 1 и

2, приведём геометрическое описание и классификацию, в зависимости от размерности, некоторых классов подмногообразий, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Через m будем обозначать размерность M, а через n – размерность объемлющего евклидова пространства, как и выше.

1. Если $m=4$, $n=6$, то M является открытой частью одного из следующих подмногообразий: прямого произведения $S^2(r_1)\times S^2(r_2)$ двух двумерных гиперсфер, или прямого произведения $M_2\times N_2$ двух поверхностей с ненулевыми гауссовыми кривизнами в трехмерных евклидовых пространствах, или прямого произведения $S^2(r)\times N_2$ двумерной гиперсферы и поверхности ненулевой гауссовой кривизны трехмерного евклидова пространства. В этом случае подмногообразие M имеет нулевой индекс дефектности.

2. Если $m=5$, $n=7$, то M является открытой частью одного из следующих подмногообразий: $S^2(r_1)\times S^3(r_2)$, $S^3(r)\times M_2$, $S^2(r_1)\times C^3$, $S^2(r_1)\times S^2(r_2)\times L_1$, $N_2\times C^3$, $M_2\times N_3$, $M_2\times N_2\times L_1$, $S^2(r)\times N_2\times L_1$, $S^2(r)\times N_3$, где L_1 – прямая; M_2, N_2 – поверхности ненулевой гауссовой кривизны трехмерных евклидовых пространств; N_3 – гиперповерхность ранга два четырёхмерного евклидова пространства; C^3 – гиперконус вращения, а остальные сомножители являются гиперсферами. Здесь в первых двух случаях подмногообразия имеют нулевой индекс дефектности, в остальных случаях индекс относительной дефектности, а следовательно, и индекс дефектности, равны единице.

3. Если $m=6$, $n=8$, то M является открытой частью одного из следующих подмногообразий: $S^2(r_1)\times S^4(r_2)$, $S^4(r)\times N_2$, $S^3(r_1)\times S^3(r_2)$, $S^2(r_1)\times S^3(r_2)\times L_1$, $S^2(r_1)\times S^2(r_2)\times L_2$, $S^2(r_1)\times C^4$, $S^3(r_1)\times C^3$, $S^2(r_1)\times C^3\times L_1$, $S^2(r_1)\times N_4$, $S^2(r_1)\times N_3\times L_1$, $S^2(r_1)\times N_2\times L_2$, $M_3\times N_3$, $M_2\times N_4$, $M_2\times N_2\times L_2$, $N_2\times C^4$, $N_3\times C^3$, $N_2\times C^3\times L_1$, $M_2\times N_3\times L_1$, где L_1 – прямая; L_2 – двумерная плоскость; M_2, N_2 – поверхности ненулевой гауссовой кривизны; M_3, N_3, N_4 – гиперповерхности ранга два; C^3, C^4 – гиперконусы вращения, а остальные сомножители являются гиперсферами. В первых трёх случаях подмногообразия имеют нулевой индекс дефектности, в остальных случаях индекс относительной дефектности, а следовательно, и индекс дефектности, равны единице или двум.

4. Если $m=7$, $n=9$, то M является открытой частью одного из следующих подмногообразий: $S^2(r_1)\times S^5(r_2)$, $S^2(r_1)\times S^4(r_2)\times L_1$, $S^2(r_1)\times S^2(r_2)\times L_3$, $S^2(r_1)\times S^3(r_2)\times L_2$, $S^2(r_1)\times M_5$, $S^2(r_1)\times C^5$, $S^2(r_1)\times C^4\times L_1$, $S^2(r_1)\times C^3\times L_2$, $S^2(r_1)\times K^5$, $S^3(r_1)\times S^4(r_2)$, $S^3(r_1)\times S^3(r_2)\times L_1$, $S^3(r)\times C^4$, $S^3(r_1)\times C^3\times L_1$, $S^3(r)\times M_4$, $S^4(r)\times C^3$, $S^4(r)\times N_3$, $N_4\times C^3$, $N_3\times C^4$, $C^3\times C^3\times L_1$, $M_2\times S^5(r)$, $M_2\times S^4(r)\times L_1$,

$M_2 \times S^3(r) \times L_2$, $M_2 \times S^2(r) \times L_3$, $M_2 \times N_5$, $M_3 \times N_4$, $M_2 \times C^5$, $M_2 \times C^4 \times L_1$, $M_2 \times C^3 \times L_2$, $M_2 \times N_2 \times L_3$, $M_2 \times K^5$, где L_1 – прямая, L_2, L_3 – двумерная и трёхмерная плоскости; C^3, C^4, C^5 – гиперконусы вращения; M_2, N_2 – поверхности ненулевой гауссовой кривизны в E_3; $M_3, M_{4,} M_5, N_3, N_4, N_5$ – гиперповерхности ранга два, а K^5 – пятимерная полуэйнштейнова гиперповерхность в E_6, описываемая, как и в пункте (e) теоремы 2.

Отметим, что в случае $m = 10$, $n = 12$ подмногообразие M локально может иметь вид произведения $K^5_{(1)} \times K^5_{(2)}$ двух гиперповерхностей, описываемых как и в пункте (e) теоремы 2.

3°. Нормально плоские риччи-полусимметрические подмногообразия коразмерности два, удовлетворяющие условию $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$. Пусть в евклидовом пространстве E_n тензор Риччи m-мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M коразмерности два имеет только одно ненулевое собственное значение. Тогда M допускает или только одну группу главных векторов кривизны (г.в.к.) $W^{(1)}$, или только две группы г.в.к. $W^{(0)}$ и $W^{(1)}$, которые соответствуют нулевому и ненулевому собственным значениям тензора Риччи. (Определение групп $W^{(t)}$ приведено, например, в [7-9]). В первом случае подмногообразие M является эйнштейновым (но не риччи-плоским), а во втором случае оно имеет более сложную структуру. Поскольку $n - m = 2$, то неравенства (2.7) и (4.7) статьи [8] принимают следующий вид:

$$0 \le \mu - \nu + k \le 2, \qquad 0 \le \mu - \nu + i_R \le 2,$$

где i_R обозначает индекс регулярности $\mu - \nu = i_S$ – индекс сингулярности, а k – число подпространств в пространстве кодефектности $T_x^{(1)}$ подмногообразия, инвариантных относительно операторов кривизны $R(X, Y)$. Из второго неравенства следует, что необходимо рассмотреть всего три случая:

(a) $i_R = 1$, $\mu = \nu$, (b) $i_R = 1$, $\mu = \nu + 1$, (c) $i_R = 2$, $\mu = \nu$.

Очевидно, что в случаях (a) и (c) $k = 1$ или $k = 2$, а в случае (b) - $k = 1$.

В случае (b) условие $i_R = 1$, как и выше, означает, что размерность линейной оболочки векторов группы $W^{(1)}$ равна 1, т.е. в $W^{(1)}$ все векторы коллинеарны, и, как мы знаем, они отвечают единственному ненулевому собственному значению тензора Риччи. Условие $\mu = \nu + 1$ означает, что группа $W^{(0)}$ содержит только один ненулевой сингулярный г.в.к. и, возможно, нулевой г.в.к. Отметим, что группа $W^{(0)}$ не может содержать регулярные г.в.к. Поскольку гиперповерхности, не являющиеся локально евклидовыми, удовлетворяют условию $\mu = \nu$ (см. [8]), то в рассматриваемом случае подмногообразие M не является гиперповерхностью. Здесь необходимо рассмотреть два случая:

(b_1) группа $W^{(1)}$ состоит из одного регулярного г.в.к. n_1, имеющего кратность ≥ 2;

(b_2) группа $W^{(1)}$ состоит из двух коллинеарных регулярных г.в.к. n_1, n_2.

Здесь мы рассмотрим только случай (b_1). Пусть m-мерное нормально плоское подмногообразие M евклидова пространства E_{m+2} допускает только одну группу $W^{(1)}$ регулярных г.в.к., состоящую только из одного вектора n_1 кратности $p \geq 2$. Поскольку $\mu = \nu + 1$, то M допускает только один ненулевой сингулярный г.в.к. n_2. Как нам известно, кратность n_2 равна единице и $n_2 \perp n_1$ (см. [8]). Пусть $T_x^{(n_1)}$ и $T_x^{(n_2)}$ обозначают собственные подпространства, сответствующие векторам n_1 и n_2 соответственно. В рассматриваемом случае в каждой точке $x \in M$ фактически $T_x^{(0)} = T_x^{(n_2)} \oplus T_x'$, где T_x' – пространство относительной дефектности, а пространство кодефектности $T_x^{(1)}$ совпадает с $T_x^{(n_1)}$. Пространство T_x' соответствует нулевому г.в.к. Поскольку по построению $\dim T_x^{(n_1)} = p$, $\dim T_x^{(n_2)} = 1$, то $\nu = \dim T_x' = m - p - 1$.

В последующем, в целях упрощения вычислений и геометрического описания подмногообразия M, ортонормированный репер $\{x_1, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2}\}$ адаптируем следующим образом:

$$e_1, \ldots, e_p \in T_x^{(n_1)},\; e_{p+1} \in T_x^{(n_2)},\; e_{p+2}, \ldots, e_m \in T_x',\; e_{m+1}, e_{m+2} \in T_x^{\perp}(M).$$

В дальнейшем индексы будут принимать следующие значения: $i, j, k = 1, \ldots, m$, $a, b, c = 1, \ldots, p$, $u, v, w = p+1, \ldots, m$, $\alpha, \beta = m+1,\ m+2$.

Поскольку нормальная связность плоская, то в некотором ортонормированном репере все матрицы $\|h_{ij}^{\alpha}\|$ второй фундаментальной формы α_2 могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^{\alpha} \delta_{ij}\|$. Тогда $n_1 = \lambda_a^{\alpha} e_{\alpha}$, $n_2 = \lambda_{p+1}^{\alpha} e_{\alpha}$, причем $\lambda_a^{\alpha} = \lambda_b^{\alpha}$, $a \neq b$ в силу кратности вектора n_1. Так как $n_1 \perp n_2$, то векторы e_{m+1}, e_{m+2} можем выбрать коллинеарно векторам n_1 и n_2 соответственно. При таком выборе для векторов n_1, n_2 получим следующие формулы: $n_1 = \lambda_a^{m+1} e_{m+1}$, $n_2 = \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2}$. Следовательно, матрицы $\|h_{ij}^{m+1}\|$, $\|h_{ij}^{m+2}\|$ второй фундаментальной формы подмногообразия M будут иметь соответственно следующий вид:

$$
\begin{Vmatrix}
\lambda_a^{m+1} & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & \lambda_a^{m+1} & & & \\
& & & 0 & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & 0
\end{Vmatrix}, \quad
\begin{Vmatrix}
0 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 0 & & & & \\
& & & \lambda_{p+1}^{m+2} & & & \\
& & & & 0 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 0
\end{Vmatrix},
$$

где $\lambda_a^{m+1} \neq 0$, $\lambda_{p+1}^{m+2} \neq 0$. Легко показать, что такой вид матриц второй фундаментальной формы α_2 m-мерного подмногообразия M в E_{m+2} в некотором ортонормальном репере с такими же условиями на диагональные элементы является достаточным, чтобы M было нормально плоским подмногообразием с одним регулярным г.в.к. кратности $p \geq 2$, одним ненулевым сингулярным и нулевым г.в.к.

Пусть $\left\{\omega^1, \cdots, \omega^{m+2}\right\}$ – корепер в E_{m+2}, двойственный к выбранному выше адаптированному реперу $\left\{x_1, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, e_{m+2}\right\}$. Тогда на M выполняются следующие соотношения:

$$\omega^\alpha = 0,\ \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha \delta_{ij} \omega^j, \tag{1}$$

$$d\lambda_i^\alpha \delta_{ij} + \lambda_i^\beta \delta_{ij} \omega_\beta^\alpha + \left(\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha\right) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \tag{2}$$

где функции h_{ijk}^α симметричны по нижним индексам.

Из (2) при $i = a, j = b, a \neq b$ следует, что $h_{abk}^\alpha = 0$. Если в (2) положить $i = j = a$, а затем $i = j = b,\ a \neq b$, то получим $d\lambda_a^\alpha + \lambda_a^\beta \omega_\beta^\alpha = h_{aak}^\alpha \omega^k$, $d\lambda_b^\alpha + \lambda_b^\beta \omega_\beta^\alpha = h_{bbk}^\alpha \omega^k$. Учитывая, что в этих равенствах левые части равны, и придавая индексу α значения, будем иметь

$$h_{aaa}^\alpha = 0,\ h_{aau}^\alpha = h_{bbu}^\alpha,\ d\lambda_a^{m+1} = h_{aau}^{m+1} \omega^u,\ \ \lambda_a^{m+1} \omega_{m+1}^{m+2} = h_{aau}^{m+2} \omega^u.$$

Из (2) при $i = u, j = a$ следует, что $\left(\lambda_a^\alpha - \lambda_u^\alpha\right) \omega_a^u = h_{aua}^\alpha \omega^a + h_{auv}^\alpha \omega^v$. Согласно результату Чженя-Кюйпера $[12]$, формы ω_a^u должны выражаться только через ω^a. Следовательно, $h_{auv}^\alpha = 0$ при любых значениях индексов u, v, и предыдущее равенство сводится к следующему: $\left(\lambda_a^\alpha - \lambda_u^\alpha\right) \omega_a^u = h_{aua}^\alpha \omega^a$. Отсюда при $\alpha = m+1$ и $\alpha = m+2$, получаем $\lambda_a^{m+1} \omega_a^u = h_{aau}^{m+1} \omega^a$, $\lambda_u^{m+2} \omega_a^u = -h_{aau}^{m+2} \omega^a$. Из последнего равенства при $u = p+1$ и $u > p+1$ имеем $\lambda_{p+1}^{m+2} \omega_a^{p+1} = -h_{aa(p+1)}^{m+2} \omega^a$, $h_{aau}^{m+2} = 0$.

Пусть в (2) $i = u$, $j = v$, $u, v > p+1$. Поскольку в этом случае $\lambda_u^\alpha = \lambda_v^\alpha = 0$, то $h_{uvk}^\alpha = 0$. Если в (2) положить $i = j = p+1$ и учесть указанный выше результат Чженя-

Кюйпера, то придём к равенству $d\lambda^{\alpha}_{p+1}+\lambda^{\beta}_{p+1}\omega^{\alpha}_{\beta}=h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{u}$. Отсюда при $\alpha=m+1$ и $\alpha=m+2$ получаем $\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{m+1}_{m+2}=h^{m+1}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{u}$, $d\lambda^{m+2}_{p+1}=h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{u}$.

Наконец, полагая в (2) $j=p+1$, $i=u$, $u>p+1$ и учитывая, что $h^{\alpha}_{auv}=0$ при любых значениях индексов u,v, а также $h^{\alpha}_{uvk}=0$ при $u,v>p+1$, приходим к следующему равенству: $\lambda^{\alpha}_{p+1}\omega^{u}_{p+1}=h^{\alpha}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{p+1}$. При $\alpha=m+1$ и $\alpha=m+2$ получаем $h^{m+1}_{(p+1)(p+1)u}=0$, $\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{u}_{p+1}=h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{u}$.

В итоге для компонент тензора h^{α}_{ijk} имеем следующую систему равенств:

$$h^{\alpha}_{abk}=0,\ a\neq b,\ h^{\alpha}_{aaa}=0,\ h^{\alpha}_{aau}=h^{\alpha}_{bbu},\ a\neq b,\ \ h^{\alpha}_{auv}=0,\ \ \ h^{m+2}_{aau}=0,\ u>p+1,$$

$$h^{\alpha}_{uvk}=0,\ u,v>p+1,\ \ h^{m+1}_{(p+1)(p+1)u}=0,\ u>p+1.$$

Кроме того, на основании проведенных вычислений можем составить следующую дифференциальную систему:

$$d\lambda^{m+1}_{a}=h^{m+1}_{aau}\omega^{u},\ \ \lambda^{m+1}_{a}\omega^{m+2}_{m+1}=h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^{p+1},$$

$$\lambda^{m+1}_{a}\omega^{u}_{a}=h^{m+1}_{aau}\omega^{a},\ \lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{p+1}_{a}=-h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^{a},$$

$$d\lambda^{m+2}_{p+1}=h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{u},\ \ \lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{m+2}_{m+1}=-h^{m+1}_{(p+1)(p+1)(p+1)}\omega^{p+1},$$

$$\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{u}_{p+1}=h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{p+1}, u>p+1.$$

Преобразуя эту систему, получим

$$d\ln\left|\lambda^{m+1}_{a}\right|=A_{u}\omega^{u},\ d\ln\left|\lambda^{m+2}_{p+1}\right|=D_{u}\omega^{u},\ \omega^{u}_{a}=A_{u}\omega^{a},\ \omega^{u}_{p+1}=D_{u}\omega^{p+1},\ \omega^{m+2}_{m+1}=B\omega^{p+1}, \qquad (3)$$

где приняты следующие обозначения:

$$A_{u}=\frac{h^{m+1}_{aau}}{\lambda^{m+1}_{a}},\ B=\frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+1}_{a}}=-\frac{h^{m+1}_{(p+1)(p+1)(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}},\ D_{u}=\frac{h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}.$$

Дифференцируя уравнения системы (3) внешним образом, учитывая (1) и применяя лемму Картана, получим

$$dA_{u}-A_{v}\omega^{v}_{u}=A_{u}A_{v}\omega^{v}, \qquad (4)$$

$$dD_{u}-D_{v}\omega^{v}_{u}=E_{uv}\omega^{v},\ E_{uv}=E_{vu}, \qquad (5)$$

$$dD_{u}-D_{v}\omega^{v}_{u}-D_{u}D_{v}\omega^{v}=F_{u}\omega^{p+1}, \qquad (6)$$

$$dB-BD_{u}\omega^{u}=G\omega^{p+1}. \qquad (7)$$

Эти условия являются условиями интегрируемости системы (3). Далее, поскольку

$$A_{p+1}=\frac{h^{m+1}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+1}_{a}}=-\frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}=-B\frac{\lambda^{m+1}_{a}}{\lambda^{m+2}_{p+1}},$$

то, дифференцируя соотношение $\lambda_{p+1}^{m+2} A_{p+1} + B\lambda_a^{m+1} = 0$ и используя формулы (3), (4), (7), будем иметь $\sum_u A_u D_u = A_{p+1} \dfrac{G}{B}$, $u > p+1$.

Распределение $T^{(n_1)}$ задается дифференциальной системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^u = 0$. Поскольку $\omega_a^{m+1} = \lambda_a^{m+1}\omega^a$, $\omega_a^{m+2} = 0$, $\omega_a^u = A_u \omega^a$, то легко проверить, что $d\omega^\alpha = d\omega^u = 0$. Это значит, что распределение $T^{(n_1)}$ интегрируемо, а его интегральное многообразие, как это видно из выражения для ω_a^{m+1} и ω_a^u, является вполне омбилическим подмногообразием, т.е. сферой размерности p (поскольку $\lambda_a^{m+1} \neq 0$), которую будем обозначать через $S^p\left(r\right)$. Сфера $S^p\left(r\right)$, будучи гиперсферой, имеет только один г.в.к. $\tilde{n} = \lambda_a^{m+1} e_{m+1} + \sum_u A_u e_u$ кратности p, который является вектором средней кривизны сферы. Следовательно, $r = \left|\tilde{n}\right|^{-1} = ((\lambda_a^{m+1})^2 + \sum_u A_u^2)^{-1}$.

Поскольку $\omega_u^\alpha = 0$ при $\omega^u = 0$, то $T^\perp\left(M\right)$ и $T^{(0)} = T^{(n_2)} + T'$, как подрасслоения нормального расслоения сферы $S^p\left(r\right)$, являются параллельными в нормальном расслоении. Следовательно, в этих подрасслоениях индуцируются плоские нормальные связности. Из (4)-(6) следует, что векторные поля $\xi = \sum_u A_u e_u$, $\zeta = \sum_u D_u e_u$ параллельны в нормальном расслоении сферы $S^p\left(r\right)$.

Распределение $T^{(n_2)}$ задается дифференциальной системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^a = 0$, $\omega^u = 0$, $u > p+1$. Легко проверить, что $d\omega^\alpha = d\omega^a = d\omega^u = 0$. Следовательно, распределение $T^{(n_2)}$ является интегрируемым. Его интегральное многообразие представляет собой некоторую кривую с единичным касательным вектором e_{p+1} в каждой точке.

Распределение T' задается дифференциальной системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^a = 0$, $\omega^{p+1} = 0$. Непосредственно проверяется, что $d\omega^\alpha = d\omega^a = d\omega^{p+1} = 0$. Следовательно, распределение T' интегрируемо, и поскольку в этом случае $\omega_u^\alpha = 0, u > p+1$, $\omega_u^\alpha = \omega_u^{p+1} = 0$, то его интегральное многообразие представляет собой плоскость размерности ν.

Наконец, распределение $T^{(0)} = T^{(n_2)} + T'$ задается дифференциальной системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^a = 0$. Тогда $d\omega^\alpha = d\omega^a = 0$, и распределение $T^{(0)}$ интегрируемо. Поскольку $\omega_u^a = 0$, то его интегральное многообразие $M^{(0)}(\dim M^{(0)} = \mu)$ является вполне геодезическим в M, а его индекс относительной дефектности равен ν, т.е. $\mu - 1$. Поскольку $\omega_u^{m+1} = 0$, $\omega_u^a = 0$, $\omega_{p+1}^{m+2} = \lambda_{p+1}^{m+2}\omega^{p+1}$, $\omega_u^{m+2} = 0, u > p+1$, то $M^{(0)}$ является локально евклидовым, т.е. его тензор кривизны равен нулю.

Поскольку распределение $T^{(1)}$ интегрируемо, а его интегральное многообразие, сфера $S^p(r)$, является вполне омбилическим в M, то выполняются условия следующей теоремы.

Теорема 3. ([4]) Пусть $\tilde{M} - n$ -мерное риманово многообразие с индексом дефектности $\mu \neq 0$ и интегрируемым распределением кодефектности $\tilde{T},^{(1)}$ $\dim \tilde{T}^{(1)} = n - \mu \geq 2$. Если его интегральное многообразие $\tilde{M}^{(1)}$ является вполне омбилическим в $\tilde{M}$, то:

1) $\tilde{M}$ локально изометрично либо цилиндру над $\tilde{M}^{(1)}$, либо цилиндру с $(\mu - 1)$-мерными образующими над конусом, построенным над $\tilde{M}^{(1)}$;

2) $\tilde{M}$ полуэйнштейново или риччи-плоское тогда и только тогда, когда $\tilde{M}^{(1)}$ эйнштейново; более того, если $\tilde{M}^{(1)}$ эйнштейново с константой $\lambda \leq 0$, то $\tilde{M}$ полуэйнштейново, если же $\lambda > 0$, то $\tilde{M}$ или полуэйнштейново, или риччи-плоское.

Согласно первой части этой теоремы, подмногообразие M изометрично или цилиндру над сферой $S^p(r)$, или цилиндру над конусом, построенному над сферой $S^p(r)$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть M является нормально плоским риччи-полусимметрическим подмногообразием коразмерности два евклидова пространства E_n. Если M допускает только один кратный регулярный и только один ненулевой сингулярный главные векторы кривизны, то оно изометрично или цилиндру над сферой, или цилиндру над конусом, построенному над сферой.

Выражаю искреннюю благодарность профессору В.А. Мирзояну за большую помощь, оказанную мне на протяжении всей работы над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lumiste Ü. *Semiparallel submanifolds in space forms.* -New York: Springer, 2009.-306 p.
2. Мирзоян В.А. *Структурные теоремы для римановых Ric- полусимметрических пространств* // Изв. Вузов. Математика. - 1992. - № 6. - С. 80-89.
3. Мирзоян В.А. *Классификация Ric- полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах* // Матем. сб. – 2000. - 191, № 9. – С. 65-80.
4. Мирзоян В.А. *Скрещенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric-полупараллельных подмногообразий* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2003. - 67, № 5. – С. 107-124.
5. Мирзоян В.А. *Структурные теоремы для Ric-полусимметрических подмногообразий и геометрическое описание одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий* // Матем. сб. – 2006. - 197, № 7. – С. 47-76.
6. Мирзоян В.А. *Классификация одного класса минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с интегрируемым распределением кодефектности* // Матем. сб. – 2008. - 199, № 3. – С. 69-94.

7. Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С. *Нормально плоские минимальные полуэйнштейновы подмногообразия с однократными главными векторами кривизны* // Докл. НАН Армении. – 2009. - 109, № 2. – С. 119-125.
8. Мирзоян В.А. *Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах* // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2011. - 75, № 6. – С. 47-78.
9. Мирзоян В.А., Мачкалян Г.С. *О нормально плоских $Ric-$полусимметрических подмногообразиях в евклидовых пространствах* // Изв. вузов. Матем. - 2012. -№ 9. - С.19-31.
10. Mirzoyan V.A. *General classification of normally flat Ric-semisymmetric submanifolds* // National Acad. Sci. of Armenia. Reports. – 2012. - 112, № 1. – P. 19-29.
11. Szabo Z.I. *Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R=0$. I. The local version* // J. Differential Geom. – 1982. - 17, № 4. – P. 531-582.
12. Chern S.S., Kuiper N. *Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Eudlidean Space* // Ann. of. Math. –1952. -56, № 3. -P. 422-430.

Материал поступил в редакцию 09.12.2015.

ԷՎԿԼԻԴԵՍՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ ԿՈՉԱՓԱՆԻ ԵՐԿՈՒ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՐԹ ՌԻՉՉԻ-ԿԻՍԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՐԿՈՒ ԴԱՍԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա.Ռ. Նազարյան

Էվկլիդեսյան տարածություններում տրվում է երկու կոչափանի նորմալ հարթ ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը, երբ Ռիչչի տենզորն ունի երկու ոչ զրոյական սեփական արժեք: Դիտարկվում են նաև նորմալ հարթ ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ՝ մեկ ռեգուլյար և մեկ ոչ զրոյական սինգուլյար կորությամբ գլխավոր վեկտորներով:

Առանցքային բառեր. ռիչչի-կիսասիմետրիկ ենթաբազմաձևություններ, ուղիղ արտադրյալներ, գլաններ և կոներ ռիմանյան բազմաձևությունների վրա:

GEOMETRIC DESCRIPTION OF TWO CLASSES OF NORMALLI FLAT RICCI-SEMISYMMETRIC SUBMANIFOLDS OF CODIMENSION TWO IN EUCLIDEAN SPACES

A.R. Nazaryan

A geometric description of normally flat Ricci-semisymmetric submanifolds in euclidean space of codimension two with two nonzero eigenvalues of the Ricci tensor is given. Normally flat Ricci semisymmetric submanifolds with one regular and one nonzero singular principal curvature vectors are also considered.

Keywords: Ricci-semisymmetric submanifolds, direct products, cylinders and cones over Riemannian manifolds.