ISBN 1829-3344 МАТЕМАТИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ . 2016. ТОМ 12, № 1

УДК 517.53; 517.572

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ТЕМ В КУРСЕ "КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ"*

С.Л. Берберян
(Российско-Армянский (Славянский) университет)
E-mail: samvel357@mail.ru

Утверждения некоторъх классических теорем, известных для аналитических функций, переносятся с помощью аналитического аппарата на гармонические функции.

Ключевые слова: аналитические, гармонические, субгармонические функции.

При прохождении курса "Комплексный анализ" студентами специальности "Прикладная математика и информатика" изучаются принцип максимального модуля для аналитических функций; теорема Лиувилля для аналитических в комплексной плоскости функций; первая и вторая теоремы Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов, члены которых функции, аналитические в некоторых областях (см. [1-4]). Цель работы показать, как на занятиях по курсу "Комплексный анализ" с помощью аналитического аппарата распространить эти результаты на гармонические функции. На наш взгляд, рассмотрение элементов теории гармонических функций позволит, с одной стороны, глубже усвоить основы теории аналитических функций, а с другой стороны - установить глубокую связь между аналитическими и гармоническими функциями. Как известно, гармонические функции играют важную роль не только в комплексном анализе, но и, в частности, в курсе "Уравнения математической физики". Вначале рассмотрим вспомогательное утверждение, необходимое для дальнейшего изложения.

Лемма 1. Пусть $u(z)$ - произвольная гармоническая функция, определенная в некоторой области G. Предположим, что $V(z)$ - одна из сопряженных к $u(z)$ - гармонических функций. Тогда функция $f(z)=\exp\{u(z)+iV(z)\}$ - аналитическая в области G.

Доказательство. Из условия леммы 1 непосредственно следует, что известные условия Коши-Римана выполняются для функций $u(z)$ и $V(z)$ в области G, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial V}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial V}{\partial x}. \end{cases} \tag{1}$$

Всюду в области G и все частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}$ непрерывны в области G. Отсюда легко подсчитать, воспользовавшись условиями (1), что если

* Работа выполнена в рамках программы развития Российско-Армянского (Славянского) университета.

$u_1(z) = Pref(z) = \exp\{u(z)\} \cdot \cos V(z)$ и $V_1(z) = Imf(z) = \exp\{u(z)\} \cdot \sin V(z)$, то условия Коши-Римана выполняются для функций $u_1(z)$ и $V_1(z)$ всюду в области G, причем все частные производные $\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial V_1}{\partial x}, \frac{\partial V_1}{\partial y}$ непрерывны в области G. Поэтому, в силу достаточного условия существования производной у функции $f(z)$, в любой точке области G имеется производная. Отсюда следует утверждение леммы 1.

Детально изучим известные теоремы комплексного анализа для гармонических функций.

1. Принцип максимума и минимума для гармонических функций.

Теорема 1. Пусть $u(z)$- гармоническая функция, отличная от постоянной, определена в области G. Тогда ни в одной точке области G функция $u(z)$ не достигает своего максимального и минимального значений.

Доказательство. Доказательство ведем методом от противного. Предположим, что $u(z)$ в некоторой точке z_0 принимает свое максимальное значение. Допустим, что $V(z)$ - одна из сопряженных к $u(z)$ гармонических функций. Тогда, очевидно, модуль аналитической функции $f(z) = \exp\{u(z) + iV(z)\}$ ограничен и в точке z_0 принимает свое максимальное значение. В силу принципа максимального модуля, для аналитических функций $\left|f(z)\right|$ всюду в области G принимает постоянное значение, а значит, $u(z)$ принимает постоянное значение в области G, что противоречит предположению. Если же $u(z)$ принимает в точке z_0 свое минимальное значение, то $-u(z)$ - гармоническая функция, принимающая в точке z_0 свое максимальное значение. Проведя вышеприведенные рассуждения, снова придем к противоречию. Утверждение теоремы 1 доказано.

После прохождения указанного материала можно ввести понятия полунепрерывных и субгармонических функций. Тем самым расширяется класс действительно-значных функций комплексного переменного, изучаемого студентами. Далее можно без доказательства сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $u(z)$ - субгармоническая функция, отличная от постоянной, определена в области G. Тогда ни в одной точке области G функция $u(z)$ не достигает своего максимального значения.

2. Теорема Лиувилля для гармонических функций.

Теорема 3. Пусть $u(z)$ - гармоническая функция, определенная во всей комплексной плоскости и ограниченная сверху (или снизу). Тогда функция $u(z)$ есть тождественная постоянная.

Доказательство. Предположим, что функция $u(z)$ ограничена сверху. Рассмотрим аналитическую функцию $f(z) = \exp\{u(z) + iV(z)\}$, где $V(z)$ - одна из сопряженных к $u(z)$ гармонических функций. Очевидно, что $\left|f(z)\right| = \exp\{u(z)\}$ будет ограниченной во всей комплексной плоскости. В силу теоремы Лиувилля, для аналитических функций функция $f(z)$ (см. $[1]$) есть тождественная постоянная.

Поэтому $\left|f(z)\right|$, а значит, $u(z)$ есть тождественная постоянная, что и требовалось доказать.

Для субгармонических функций важно отметить, что справедливо утверждение.

Теорема 4. Пусть $u(z)$ - субгармоническая функция, определенная во всей комплексной плоскости и ограниченная сверху. Тогда функция $u(z)$ есть тождественная постоянная.

4. Первая теорема Вейерштрасса для гармонических функций.

Теорема 5. Пусть дан ряд

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots, \tag{2}$$

все члены которого гармонические в области G функции. Если ряд равномерно сходится внутри области G, то сумма ряда есть гармоническая функция в области G.

Для доказательства теоремы 5 приведем утверждение, равносильное которому доказано, например, в работе $[2]$.

Лемма 2. Пусть дан ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots, \tag{3}$$

члены которого аналитические в области G функции.

Если ряд (2), где $u_n(z) = \operatorname{Re} f_n(z)$, равномерно сходится внутри области G, и, кроме того, ряд (3) сходится в какой-либо точке $z_0 \in G$, то ряд (3) равномерно сходится внутри G.

Доказательство теоремы 5. Для доказательства достаточно рассмотреть произвольную точку $z_0 \in G$ и взять такой круг K_{z_0} с центром в точке z_0 и радиусом, равным расстоянию от z_0 до границы области G. Построим для каждой из заданных гармонических функций $u_n(z)$ гармоническую функцию $V_n(z)$, сопряженную к $u_n(z)$ в указанном круге, причем постоянную интегрирования при определении $V_n(z)$ выберем так, чтобы выполнялось условие $V_n(z_0) = 0$, $n = 1,2,\ldots$. Получим последовательность аналитических функций $f_n(z) = u_n(z) + iV_n(z)$. Так как сумма ряда $f_1(z_0) = f_2(z_0) + f_n(z_0) + \ldots$ совпадает с суммой ряда $u_1(z_0) + u_2(z_0) + \ldots + u_n(z_0) + \ldots$, то, согласно утверждению леммы 2, ряд (3) равномерно сходится внутри области G. Поэтому, в силу утверждения первой теоремы Вейерштрасса, для равномерно сходящихся внутри G рядов, члены которых аналитические функции в G, сумма ряда (3) будет аналитической функцией в K_{z_0}. Поэтому $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ есть функция, гармоническая в этом же круге. При этом, очевидно, $u(z)$ представляет собой сумму ряда (2) в круге K_{z_0}. В силу произвольности взятой точки z_0 в области G, получим утверждение теоремы 5.

Перефразируя утверждение теоремы 5, получим следующее утверждение.

Следствие 1. Предел последовательности гармонических функций $\{u_n(z)\}$, равномерно сходящейся внутри области G, есть функция, гармоническая в этой области.

5. Вторая теорема Вейерштрасса для гармонических функций.

Теорема 6. Пусть дан ряд

$$u_1(z)+u_2(z)+...+u_n(z)+..., \tag{4}$$

все члены которого функции, гармонические в области G и непрерывные в замкнутой области $\overline{G}$. Если ряд (4) сходится равномерно на границе области G, то он сходится равномерно во всей замкнутой области G.

Доказательство. Действительно, обозначив через ξ произвольную точку границы области G, из условия равномерной сходимости ряда (4) на границе области следует, что при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при $p \geq 1$ справедливо неравенство

$$\left| u_{N+1}(\xi)+u_{N+2}(\xi)+...+u_{N+p}(\xi) \right| < \varepsilon\,. \tag{5}$$

Так как функция $u_{N+1}(z)+u_{N+2}(z)+u_{N+p}(z)$ есть гармоническая функция в области G и непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$, то функция $\left| u_{N+1}(z)+u_{N+2}(z)+u_{N+p}(z) \right|$ есть субгармоническая в области G и непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$. В силу принципа максимума для субгармонических функций, ее максимальное значение не может приниматься в области G, так как субгармоническая функция $\left| u_{N+1}(z)+u_{N+2}(z)+u_{N+p}(z) \right|$ не есть тождественная постоянная. В то же время, так как функция $\left| u_{N+1}(z)+u_{N+2}(z)+u_{N+p}(z) \right|$ - непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$, то она должна принимать свое максимальное значение на границе области G. Поэтому из неравенства (5) следует, что для любой точки $z \in \overline{G}$

$$\left| u_{N+1}(z)+u_{N+2}(z)+...+u_{N+p}(z) \right| < \varepsilon \tag{6}$$

при сколь угодно малом ε, если $N = N(\varepsilon)$ и $p \geq 1$. А это значит, согласно необходимому и достаточному условию равномерной сходимости, что ряд (4) равномерно сходится в замкнутой области $\overline{G}$. Тем самым утверждение теоремы 6 доказано.

Замечание. Анализируя доказательство теоремы 6, можно обратить внимание студентов на то, что мы, по существу, использовали принцип максимума в области $\overline{G}$ и непрерывность функций в замкнутой области $\overline{G}$. Учитывая, что эти два свойства имеют место для непрерывных субгармонических функций, справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть дан ряд (4), все члены которого функции, субгармонические функции в области G и непрерывные в замкнутой области $\overline{G}$. Если ряд (4) сходится равномерно на границе области G, то он сходится равномерно в замкнутой области $\overline{G}$.
Перефразируя утверждение теоремы 6 для последовательности гармонических функций, получим следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть дана последовательность функций $\{u_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, гармонических в области G и непрерывных в замкнутой области $\overline{G}$, которая равномерно сходится на границе области. Тогда эта последовательность равномерно сходится в замкнутой области $\overline{G}$.

Очевидно, что предельная функция $u(z)$, в силу теоремы 5, будет гармонической функцией в области G.

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И.И. *Введение в теорию функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1984. – 432с.
2. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* – М.Л.: ГИТТЛ, 1950. – 701 с.
3. Бицадзе А.В. *Основы теории аналитических функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1984. - 320 с.
4. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* Ч.1 – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Материал поступил в редакцию 09.02.2016.

«ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԱՆԱԼԻԶ» ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ ԱՌԱՆՁԻՆ ԹԵՄԱՆԵՐԻ ԴԱՍԱՎԱՆԴՄԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՅԵՑԱԿԵՏԵՐ

Ս.Լ. Բերբերյան

Ուսումնասիրվել են մի քանի հայտնի թեորեմներ հարմոնիկ, սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համար և նրանց կապը անալիտիկ ֆունկցիաների հետ «Կոմպլեքս անալիզ» դասընթացում:

Առանցքային բառեր. անալիտիկ, հարմոնիկ, սուբհարմոնիկ ֆունկցիաներ:

SOME ASPECTS OF A TEACHING OF THE SEVERAL THEMES IN A “COMPLEX ANALYSIS” COURSE

S.L. Berberyan

It was studied some famous theorems for harmonic and subharmonic functions and their connection with analytical functions in a “Complex analysis” course.

Keywords: analytig, harmonic, subharmonic functions.