

УДК 621.762, 620.10

## **ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗОГНУТОЙ СПЕЧЕННОЙ ШИРОКОЙ ПОЛОСЫ**

**Г.Л. Петросян, Н.Г. Акопян, Г.Л. Левонян**

*Национальный политехнический университет Армении*

Изучается пластический чистый изгиб широкой полосы из спеченного неупрочняющегося материала в условиях плоской деформации. Задача решается двумя упрощенными методами, в основе которых лежит известная аналитическая формула радиального напряжения.

Рассматривается решение задачи пластического чистого изгиба плоской полосы из сплошного неупрочняющегося материала. Оцениваются величины главных напряжений, возникающих в растягивающих и сжимающих слоях плоскодеформированной полосы. Приводятся формулы радиального и окружного напряжений в безразмерных величинах, а также формулы определения их величины для различных материалов.

В первом случае принимается, что, по аналогии со сплошным материалом, для определения окружного напряжения полосы из спеченного материала можно использовать его предел текучести, зависящий от пористости материала. Для этого используется формула эквивалентного напряжения по деформационной теории пластичности пористых материалов (ДТППМ). Показано, что предел текучести пористых материалов выражается через вторую функцию пористости.

Во втором случае, кроме формулы эквивалентного напряжения, используются также условие плоской деформации и уравнение связи между деформацией и напряжениями ДТППМ, которые позволяют представить эквивалентное напряжение через радиальное и окружное напряжения. В результате этого получается квадратное уравнение относительно окружного напряжения, при решении которого получена формула для определения окружного напряжения.

Для решения численного примера выбраны простейшие функции пористости, начальные данные сплошного и спеченного (с 10%-й начальной пористостью) материалов. Разработан алгоритм для определения компонентов напряженного состояния. Численные расчеты произведены в программной среде MathCAD. По высоте толщины полосы построены эпюры напряжения с учетом и без учета пористости материала и проведен их анализ.

**Ключевые слова:** пластический изгиб, широкая полоса, окружные и радиальные напряжения, пористость.

**Введение.** В [1] рассматривается изгиб листа из сплошного жесткопластического материала в условиях плоской деформации. Показано, что при изгибе листа происходит сдвиг нейтрального слоя в сторону центра кривизны, и во время вдавливания листов полосы появляются радиальные напряжения (рис.1).

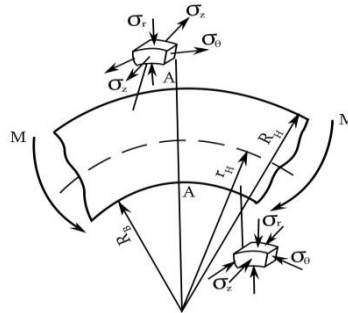


Рис. 1. Схема чистого изгиба полосы

Определены радиус нейтрального слоя и напряжения в растянутых и сжатых зонах. Предварительно задавая значение окружной логарифмической деформации нижней поверхности листа, получено численное решение задачи. В [2] решена задача для жесткопластического упрочняющегося сплошного материала. При этом использованы условия пластичности Губера-Мизеса и Треска-Сен-Венана, а также уравнения теории течения сплошных материалов. Численные расчеты произведены методом, приведенным в [1].

В [3] рассмотрен чистый изгиб листа из спеченного жесткопластического упрочняющегося материала в условиях плоской деформации. На основе уравнения теории течения пористых материалов (ТПМ) [4] решение задачи сведено к решению нелинейного дифференциального уравнения относительно радиального напряжения. Численным интегрированием определены положение нейтрального слоя и компоненты напряженно-деформированного состояния листа. Построены эпюры компонентов напряжений и графики изменения пористости по толщине.

В [5] рассмотрены соотношения между толщиной  $S$ , наружной  $R_n$ , внутренней  $R_B$ , нейтральной  $r_n$  и срединной  $R_C$  поверхностями широкой полосы из сплошного материала при чистом изгибе с учетом и без учета упрочнения материала. Показано также появление на ней пластического пояса и его расширение. Особое внимание уделено определению окружных и радиальных напряжений, построению их эпюр и анализу. При этом формулы окружных и радиальных напряжений совпадают с выражениями, полученными в [1,2] при изгибе листа.

Что касается решения задачи изгиба широкой полосы из спеченного пористого материала, то следует отметить, что исследования в этой области практически отсутствуют. Это объясняется сложностью использования условий пластичности пористых материалов и получения на практике результатов. Следовательно, решение задач в этом направлении является актуальным.

**Постановка задачи и методы исследования.** Целью работы является разработка упрощенных методов определения компонентов напряженного состояния изогнутой спеченной полосы на основе известной аналитической безразмерной формулы радиального напряжения пластического изгиба широкой полосы из сплошного материала.

Сначала рассмотрим пластический чистый изгиб плоской полосы из сплошного неупрочняющегося материала под воздействием моментов  $M$  (рис. 1). При этом верхние слои полосы растягиваются, а нижние – сжимаются, следовательно, главными напряжениями являются:

в растянутых слоях –

$$\sigma_1 = \sigma_\theta, \sigma_2 = \sigma_z, \sigma_3 = \sigma_r;$$

в сжатых слоях –

$$\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_2 = \sigma_z, \sigma_3 = \sigma_\theta.$$

В [1] для определения радиального напряжения используется следующее уравнение равновесия:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0.$$

В случае плоской деформации полосы ( $\varepsilon_z = 0$ ) в [1] для неупрочняющегося материала радиальные и окружные напряжения в безразмерных величинах представлены в виде:

в растянутых слоях –

$$\bar{\sigma}_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{R_B}, \bar{\sigma}_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( 1 + \ln \frac{r}{R_H} \right);$$

в сжатых слоях –

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{R_B}, \bar{\sigma}_\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left( 1 + \ln \frac{r}{R_H} \right), \quad (1)$$

где

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_T}, \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_T}, \quad (2)$$

$\sigma_T$  - предел текучести материала.

По полученным безразмерным данным  $\bar{\sigma}_r$  и  $\bar{\sigma}_\theta$ , используя формулу (2), для разных материалов определим следующие величины радиальных  $\sigma_r$  и окружных  $\sigma_\theta$  напряжений:

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_r \sigma_T, \sigma_\theta = \bar{\sigma}_\theta \sigma_T. \quad (3)$$

**В случае первого упрощенного метода** принимается, что для определения радиальных и окружных напряжений полос из спеченного пористого материала в формуле (3) для различных пористостей можно использовать пределы текучести  $\sigma_{Tv}$ , зависящие от пористости.

Для определения  $\sigma_{Tv}$  спеченных материалов воспользуемся формулой эквивалентного напряжения  $\sigma_{эKB}$  по ДТППМ:

$$\sigma_{эKB} = \frac{1}{\beta^{n+0,5}} \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + \alpha_0^m (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}, \quad (4)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные напряжения;  $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$  - среднее нормальное напряжение;  $\alpha_0, \beta, m, n$  - соответственно функции пористости и параметры пористого материала.

Отметим, что условие пластичности для спеченного материала согласно (4) примет следующий вид:

$$\beta^{n+0,5} \sigma_{T0} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + \alpha_0^m (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}, \quad (5)$$

где  $\sigma_{T0}$  - предел текучести вещества пористого материала [4].

Из (5) следует, что предел текучести пористых материалов  $\sigma_{Tv}$  выражается через функции пористости  $\beta^{n+0,5}$  и определяется следующим образом:  $\sigma_{Tv} = \sigma_{T0} \cdot \beta^{n+0,5}$ . Поэтому вместо (3) следует использовать формулы

$$\sigma_r = \bar{\sigma}_r \beta^{n+0,5} \sigma_{T0} \quad \text{и} \quad \sigma_\theta = \bar{\sigma}_\theta \beta^{n+0,5} \sigma_{T0}. \quad (6)$$

**В случае второго упрощенного метода** аналогично [3] на основании соотношения [4] для эквивалентного напряжения  $\sigma_{эKB}$  окружное напряжение выражается через радиальное напряжение. Поэтому используются условие плоской деформации ( $\varepsilon_z = 0$ ) и уравнение связи между деформацией и напряжениями из ДТППМ [4]:

$$\varepsilon_z = \frac{3\varepsilon_{эKB}}{2\beta^{3n}\sigma_{эKB}} [\sigma_z - (1 - 2\alpha_0^m)\sigma_0], \quad (7)$$

где  $\varepsilon_{эKB}$  - эквивалентная деформация.

Отметим, что условие  $\varepsilon_z = 0$  и уравнение (7) позволяют представить напряжение  $\sigma_z$  через радиальное  $\sigma_r$  и окружное  $\sigma_\theta$  напряжения:

$$\sigma_z = \frac{1-2\alpha_0^m}{2(1+\alpha_0^m)} (\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (8)$$

В этом случае формула (5) сначала преобразуется в напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta$  и  $\sigma_z$ , а затем представляется в следующем виде:

$$2\sigma_{T0}^2\beta^{2n+1} = [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2] + 2\alpha_0^m(\sigma_z + \sigma_r + \sigma_\theta)^2. \quad (9)$$

Исключая  $\sigma_z$  из (9) и преобразуя его в квадратное уравнение относительно  $\sigma_\theta$ , представим решение в виде

$$\sigma_\theta = \frac{-\sigma_r(2\alpha_0^{2m} + \alpha_0^m - 1) \pm (\alpha^m + 1) \sqrt{-12\sigma_r^2\alpha_0^m(\alpha_0^m + 1) + \sigma_{T0}^2(4\alpha_0^{2m} + 5\alpha_0^m + 1)(2\beta^{n+0.5})^2/3}}{(4\alpha_0^{2m} + 5\alpha_0^m + 1)}. \quad (10)$$

Для решения численного примера выберем простейшие функции пористости [6]:

$$\alpha_0 = v_0, \quad \beta = 1 - v.$$

Вычислим  $\sigma_\theta$  при  $v_0 = 0, v_0 = 0,1, \sigma_{T0} = 200 \text{ МПа}, n = 0,25, m = 1,$

$$\sigma_{Tv} = \sigma_{T0} \cdot \beta^{n+0.5} = \sigma_{T0}(1 - v)^{0.75}.$$

В этом случае будем иметь

$$v_0 = 0, \quad \sigma_{T0} = 200 \cdot 1 = 200 \text{ МПа}$$

и

$$v_0 = 0,1; \quad \sigma_{T\ 10\%} = 200 \cdot (0,9)^{0.75} = 184,8 \text{ МПа}.$$

Тогда для  $\sigma_\theta$  получим

при  $v_0 = 0$ :

$$\sigma_\theta = -\sigma_r(-1) \pm \sqrt{200^2 \cdot \frac{4}{3}} = \sigma_r \pm 230,94; \quad (11)$$

при  $v_0 = 0,1$ :

$$\sigma_\theta = 0,57\sigma_r \pm 0,714\sqrt{72444,4 - 1,32\sigma_r^2}. \quad (12)$$

В табл.1 приведены результаты вычислений при  $R_H = 80 \text{ мм}, R_B = 40 \text{ мм}, r_n = \sqrt{R_e R_n} = 56,57 \text{ мм}.$

Таблица 1

Безразмерные величины напряжений  $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta$  в поперечном сечении АА полосы (рис. 1)

$r, \text{ мм}$	80	75	70	65	60	56.57	56.57	55	50	45	40
$\bar{\sigma}_r$	0	-0,0746	-0,154	-0,24	-0,332	-0,4	-0,4	-0,368	-0,258	-0,136	0
$\bar{\sigma}_\theta$	1,156	1,08	1,002	0,916	0,824	0,756	1,556	-1,523	-1,413	-1,292	-1,156

По полученным значениям безразмерных напряжений  $\bar{\sigma}_r$  и  $\bar{\sigma}_\theta$  в поперечном сечении АА полосы построены их эпюры (рис. 2).

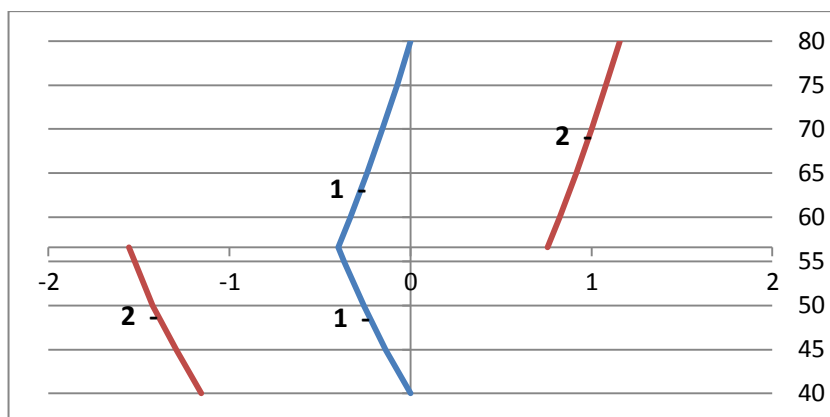


Рис. 2. Эпюры безразмерных напряжений: 1 -  $\bar{\sigma}_r$  и 2 -  $\bar{\sigma}_\theta$  в поперечном сечении AA полосы

В табл. 2 приведены значения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в поперечном сечении AA полосы при  $v_0 = 0$  и  $v_0 = 0,1$ ,  $\sigma_{T0} = 200$  МПа,  $\alpha_0 = v_0$ ,  $\beta = 1 - v = 1 - v_0$ ,  $m = 1$ ,  $n = 0,25$ . При этом данные первых двух строк получены по формулам (3) и (11). Значения предпоследней строки получены по формуле (6), а данные последней строки – по формуле (12).

Таблица 2

Величины напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в сечении AA полосы при  $v_0 = 0$  и  $v_0 = 0,1$ ,  $\sigma_{T0} = 200$  МПа,  $\alpha_0 = v_0$ ,  $\beta = 1 - v = 1 - v_0$ ,  $m = 1$ ,  $n = 0,25$

$r, \text{ мм}$	$\sigma, \text{ МПа}$										
	80	75	70	65	60	56.57	56.57	55	50	45	40
$\sigma_{rv_0=0}$	0	-15,3	-30,8	-48,0	-66,4	-80,0	-80,0	-73,6	-51,6	-27,2	0
$\sigma_{\theta v_0=0}$	231	216	200	183	165	151	-311	-305	-283	-258	-231
$\sigma_{rv_0=0.1}$	0	-13,8	-28,5	-44,4	-61,4	-73,9	-73,9	-68,0	-47,7	-25,2	0
$\sigma_{\theta v_0=0.1}$ согласно (6)	214	200	185	169	152	140	-288	-282	-261	-239	-214
$\sigma_{\theta v_0=0.1}$ согласно (12)	193	185	175	164	151	141	-225	-224	216	-206	-193

По полученным данным построены эпюры напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в поперечном сечении AA полосы при  $v_0 = 0$  (рис.3, кривые 1,2 построены соответственно по формулам (6) и (12)).

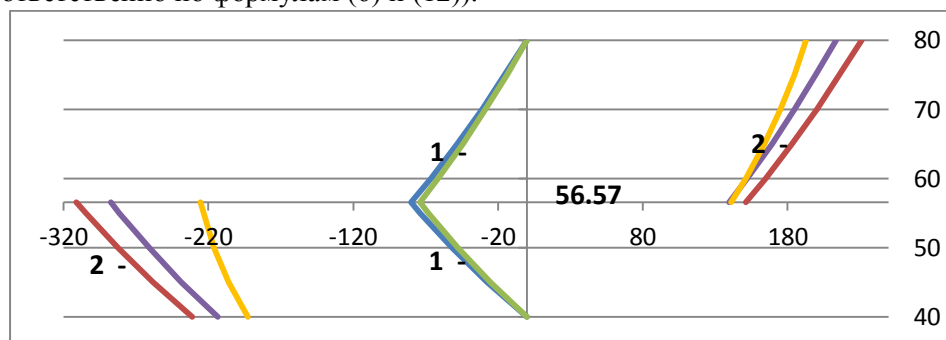


Рис.3. Эпюры напряжений: 1 -  $\sigma_r$  и 2 -  $\sigma_\theta$  в поперечном сечении AA полосы

### Выводы

1. Обосновано решение задачи чистого изгиба широкой полосы из спеченного пористого неупрочняющегося материала в условиях плоской деформации аналогично решению задачи чистого изгиба листа. Используя уравнения ДТППМ и результаты решения задачи пластического изгиба полосы из сплошного материала, разработаны два упрощенных метода.
2. В случае первого упрощенного метода использованы формулы безразмерных напряжений для сплошного неупрочняющегося материала, которые применимы для любого сплошного материала. Показано, что их можно использовать и для любого спеченного материала с начальной пористостью, предварительно определяя их напряжения пределов текучести.
3. В случае второго упрощенного метода, используя формулу эквивалентного напряжения ДТППМ, выведена аналитическая формула для определения окружных напряжений  $\sigma_\theta$  при изгибе широкой полосы из спеченного материала различной пористости, на основе которой получены формулы для определения окружных напряжений  $\sigma_\theta$  в случае сплошного ( $v_0 = 0$ ) и спеченного (с 10%-й начальной пористостью) материалов.
4. Разработан алгоритм для определения компонентов напряженного состояния. Произведены численные расчеты в программной среде MathCAD для определения окружных и радиальных напряжений при изгибе широкой полосы из сплошного и спеченного материалов с 10%-й начальной пористостью. Составлены таблицы и построены эпюры окружных и радиальных напряжений. Показано, что с повышением начальной пористости абсолютные значения окружных и радиальных напряжений уменьшаются. Сопоставление результатов окружных напряжений, полученных упрощенными методами в растянутой и сжатой зонах полосы, показывает некоторую разницу между ними: лучшее

согласование результатов упрощенных методов наблюдается в растянутой зоне. Это объясняется тем, что в этой зоне пористость полосы увеличивается, а в сжатой зоне – уменьшается.

#### Литература

1. **Малинин Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести.- М.: Машиностроение, 1975. -399с.
2. **Ширшов А.А.** Исследование пластического изгиба листа с учетом упрочнения // Известия вузов. Машиностроение.- 1965.- N7.- С.168-174.
3. **Պետրոսյան Գ.Լ., Լևոնյան Հ.Լ.** Եռակալված նյութից թերթի պլաստիկ ծռումը // ՀՊՃՀ Տեղեկագիր.- Երևան, 2006.- էջ 455-461:
4. **Петросян Г.Л.** Пластическое деформирование порошковых материалов.- М.: Металлургия, 1988. – 153с.
5. **Сторожев М.Б., Попов Е.А.** Теория обработки металлов давлением.- М.: Машиностроение, 1977. – 423с.
6. **Պետրոսյան Գ.Լ., Պետրոսյան Հ.Գ., Լևոնյան Հ.Լ.** Ծակոտկեն նյութերի պլաստիկության տեսության պարզեցված բանաձևերի մասին // ՀՊՃՀ տարեկան գիտաժողովի նյութերի ժողովածու.- Երևան, 2005.- Հատոր 2.- էջ 411-413:

*Поступила в редакцию 20.03.2018.  
Принята к опубликованию 04.06.2018.*

### ԾՈՒՄԱՆ ԵՆԹԱՐԿՎԱԾ ԵՌԱԿԱԼՎԱԾ ԼԱՅՆ ՇԵՐՏԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

#### Գ.Լ. Պետրոսյան, Ն.Գ. Հակոբյան, Հ.Լ. Լևոնյան

Դիտարկված է եռակալված չամրացվող նյութից լայն շերտի մաքուր ծռումը հարթ դեֆորմացման պայմաններում: Խնդիրը լուծված է երկու պարզ մեթոդներով, որոնց հիմքում ընկած է շրջանային լարման հայտնի բանաձևը:

Նախ ուսումնասիրվել է հոծ նյութի շերտի մաքուր ծռման խնդիրը: Գնահատվել են գլխավոր լարումների մեծությունները, որոնք առաջանում են հարթ դեֆորմացված շերտերի ձգման և սեղմման գոտիներում: Բերված են շրջանային և շառավղային չափագուրկ լարումների, ինչպես նաև տարբեր նյութերի դեպքում դրանց մեծությունների որոշման բանաձևերը:

Առաջին դեպքում ընդունվել է, որ հոծ նյութի նման՝ եռակալված շերտի շրջանային լարման որոշման համար կարելի է օգտագործել դրա հոսունության սահմանը՝ կախված նյութի ծակոտկենությունից: Դրա համար օգտագործվում է ծակոտկեն նյութերի պլաստիկության դեֆորմացիոն տեսության (ԾՆՊԴՏ) համարժեքային լարման բանաձևը: Ցույց է տրվել, որ ծակոտկեն նյութերի հոսունության սահմանն արտահայտվում է ծակոտկենության երկրորդ ֆունկցիայով:

Երկրորդ դեպքում, բացի համարժեքային լարման բանաձևից, օգտագործվում են նաև հարթ դեֆորմացման պայմանը և ԾՆՊԴՏ դեֆորմացման ու լարումների միջև կապի



բանանձը, որոնք թույլ են տալիս համարժեքային լարումը ներկայացնել շրջանային և շառավղային լարումներով: Դրա արդյունքում ստացվում է շրջանային լարման քառակուսային հավասարում, որի լուծումով ստացվում է շրջանային լարման որոշման բանաձև:

Թվային օրինակի լուծման համար ընտրվել են ծակոտկենության պարզեցված ֆունկցիաներ, հոծ և 10% սկզբնական ծակոտկենությամբ եռակալված նյութերի սկզբնական տվյալներ: Մշակվել է ալգորիթմ լարվածային վիճակի բաղադրիչների որոշման համար: Կատարվել են թվային հաշվարկներ MatCAD ծրագրային միջավայրում: Կառուցվել են լարումների գրաֆիկներ ծակոտկենության առկայության և բացակայության դեպքերի համար, և կատարվել է դրանց վերլուծությունը:

**Առանցքային բաներ.** պլաստիկ ծռում, լայն շերտ, շրջանային և շառավղային լարումներ, ծակոտկենություն:

## INVESTIGATING THE STRESS STATE OF THE BENT SINTERED WIDE STRIP

G.L. Petrosyan, N.G. Akobyan, H.L. Levonyan

A plastic pure bending of a wide strip of sintered non-hardening material under the conditions of plane deformation is studied. The problem is solved by two simplified methods, based on the known analytical formula of radial stress.

The solution of the problem of plastic pure bending of a flat strip from a continuous non-hardening material is considered. The magnitudes of the main stresses, arising in the stretching and compressing layers of the plane-deformed strip are estimated. Formulae for the radial and circumferential stresses in dimensionless quantities, as well as formulae for determining their magnitude for various materials are given.

In the first case, it is assumed that by analogy with a continuous material, to determine the circumferential stress of a strip of sintered material, its yield strength, depending on the porosity of the material, can be used. For this, we use the formula for the equivalent stress in the deformation theory of the plasticity of porous materials (DTPPM). It is shown that the yield stress of porous materials is expressed through the second function of porosity.

In the second case, in addition to the equivalent stress formula, the condition of the plane strain and the equation of the relation between the deformation and stresses of the DTPPM, which allow the equivalent stress to be represented through the radial and circumferential stresses, are also used.

As a result, a quadratic equation is obtained with respect to the circumferential stress, the solution of which is the formula for determining the circumferential stress.

To solve the numerical example, the simplest porosity functions, initial data of solid material and sintered material with 10% initial porosity are selected. An algorithm for determining the components of the stress state is developed. Numerical calculations are performed in the MathCAD software environment. On the height of the strip thickness, stress plots are constructed with and without consideration of the porosity of the material, and their analysis is carried out.

**Keywords:** plastic bending, wide strip, circumferential and radial stresses, porosity.