ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.52+512.643.4

О НЕОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ТРАНСПОНИРОВАННЫХ АНАЛОГОВ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СИЛЬВЕСТРА $\mathbf{A(t)\cdot X(t)+X^T(t)\cdot B(t)=C(t)}$ (Декомпозиционный подход)

С.О. Симонян

Национальный политехнический университет Армении

Предложены декомпозиционные аналитический, а также последовательный и параллельный численно-аналитические методы решения однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра в случае невыполнения соответствующих условий гиперрегулярности при аналитическом и последовательном численно-аналитическом методах, а также невыполнения условия суперрегулярности при параллельном численно-аналитическом методе (при невыполнении соответствующих условий однозначной разрешимости) редуцированной эквивалентной задачи, содержащей лишь только неизвестную матрицу, подлежащую определению. Несмотря на то, что аналитический метод в общем случае ограничен в практических приложениях, однако он служит основой для разработки последовательного и параллельного численно-аналитических методов. Последние определенным образом дополняют имеющийся пробел в рассматриваемой области. Во всех методах широко используется аппарат кронекеровых произведений матриц, а в численно-аналитических методах - и дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова, принципиально отличающиеся от известных интегральных преобразований и обладающие определенными положительными вычислительными характеристиками по сравнению с последними. Рассмотрены также вопросы однозначной разрешимости задачи (вопросы единственности решений при соответствующих методах) с использованием произвольных корректирующих гипервекторов при аналитическом и последовательном численно-аналитическом методах и произвольных корректирующих супервекторов при параллельном численно-аналитическом методе.

Ключевые слова: однопараметрический транспонированный аналог матричных уравнений типа Сильвестра; невыполнение условий регулярности, гиперрегулярности, суперрегулярности; произвольные корректирующие гипервекторы; произвольные корректирующие супервекторы; аналитический, последовательный и параллельный численно-аналитические методы; дифференциальные преобразования; современные средства информационных технологий.

Введение. В работе [1] при однозначной разрешимости задач предложены прямые методы решения однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра

$$A(t)\cdot X(t)+X^T(t)\cdot B(t)=C(t), \tag{1}$$

где $A(t), B(t), C(t)$ - однопараметрические матрицы порядка m, а $X(t)$ - подлежащая определению неизвестная матрица того же порядка. На основе редукции (1) здесь же получено достаточно сложное представление

$$A(t)\cdot X(t)\cdot B^{-1}(t)-B^T(t)\cdot X(t)\cdot A^{-T}(t)=C(t)\cdot B^{-1}(t)-C^T(t)\cdot A^{-T}(t)=D_1(t), \tag{2}$$

однако содержащее лишь только неизвестную матрицу $X(t)$ в отличие от (1), содержащего и матрицу $X^T(t)$. Далее, применив относительно (2) аппарат кронекеровых произведений матриц [2], получена линейная по отношению к гипервектору $\hat{X}(t)_{m^2\times 1}$ гиперматрично-гипервекторно-блочная система уравнений

$$[A(t)\otimes B^{-T}(t)-B^T(t)\otimes A^{-1}(t)]_{m^2\times m^2}\cdot\hat{X}(t)_{m^2\times 1}=D(t)\cdot\hat{X}(t)=\hat{D}_1(t)_{m^2\times 1}, \tag{3}$$

имеющая решение

$$\hat{X}(t)_{m^2\times 1}=[A(t)\otimes B^{-T}(t)-B^T(t)\otimes A^{-1}(t)]^{-1}\cdot\hat{D}_1(t)=D^{-1}(t)_{m^2\times m^2}\cdot\hat{D}_1(t)_{m^2\times 1} \tag{4}$$

при одновременном выполнении условий однозначной разрешимости задачи

$$detA(t)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \exists A^{-1}(t),\quad \forall t, \tag{5}$$

$$detB(t)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \exists B^{-1}(t),\quad \forall t \tag{6}$$

$$detD(t)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \exists D^{-1}(t),\quad \forall t. \tag{7}$$

Далее в работе [3] предложены такие же прямые методы при выполнении условий (5), (6) и невыполнении условия (7), т.е. при

$$detD(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \nexists D^{-1}(t),\ \ \exists D^{+}(t),\quad \forall t. \tag{8}$$

Тогда общее аналитическое решение задачи (1) выглядит так:

$$X(t)_{m^2\times 1}=D^{+}(t)_{m^2\times m^2}\cdot\hat{D}_1(t)_{m^2\times 1}+[E_{m^2\times m^2}-D^{+}(t)_{m^2\times m^2}\cdot D(t)_{m^2\times m^2}]\cdot W(t)_{m^2\times 1}, \tag{9}$$

где $D^{+}(t)$ – однопараметрическая обобщенная обратная гиперматрица порядка m^2; E – единичная матрица того же порядка, а $W(t)=(w(t)_1,\ \ldots,\ w(t)_{m2})^T$ - произвольный корректирующий однопараметрический гипервектор с размерами $m^2\times 1$.

Замечание 1. Для определения однопараметрических обратных матриц $A^{-1}(t),\ B^{-1}(t)$ и гиперматрицы $D^{-1}(t)$, а также однопараметрической обобщенной обратной гиперматрицы $D^{+}(t)$ могут быть использованы численно-аналитические методы, предложенные в монографии [4].

Замечание 2. При выполнении условий (5), (6) и (8) задача будет иметь единственное решение, если, согласно (9), будет иметь место равенство

$$D^{+}(t)\cdot D(t)=E_{m^2\times m^2} \tag{10}$$

при произвольном однопараметрическом корректирующем гипервекторе $W(t)$.

В настоящей работе предлагаются численно-аналитические методы решения задачи при одновременном выполнении условий (5), (6) и (8), основанные на декомпозиционном подходе и дифференциальных преобразованиях [5].

Аналитический метод решения. Теперь допустим, что

$$A(t)=A_1(t)+j\cdot A_2(t), \tag{11}$$

$$B(t)=B_1(t)+j\cdot B_2(t), \tag{12}$$

$$C(t)=C_1(t)+j\cdot C_2(t), \tag{13}$$

а также

$$A^{-1}(t)=M(t)=M_1(t)+j\cdot M_2(t), \tag{14}$$

$$B^{-1}(t)=N(t)=N_1(t)+j\cdot N_2(t). \tag{15}$$

Естественно, при этом должны иметь место условия регулярности задачи, т.е.

$$detA(t)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists A^{-1}(t), \quad \forall t, \tag{16}$$

$$detB(t)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists B^{-1}(t), \quad \forall t. \tag{17}$$

Тогда нетрудно убедиться, что при соотношениях (11)-(15) и условиях (16), (17) представление (2) приобретает вид следующей достаточно сложной системы матричных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases}A_1(t)\cdot X_1(t)\cdot N_1(t)-A_2(t)\cdot X_2(t)\cdot N_1(t)-A_1(t)\cdot X_2(t)\cdot N_2(t)-A_2(t)\cdot X_1(t)\times\\ \times N_2(t)-B_1^T(t)\cdot X_1(t)\cdot M_1^T(t)+B_2^T(t)\cdot X_2(t)\cdot M_1^T(t)+B_1^T(t)\cdot X_2(t)\cdot M_2^T(t)+\\ +B_2^T(t)\cdot X_1(t)\cdot M_2^T(t)=C_1(t)\cdot N_1(t)-C_2(t)\cdot N_2(t)-\\ -C_1^T(t)\cdot M_1^T(t)+C_2^T(t)\cdot M_2^T(t),\\ A_1(t)\cdot X_1(t)\cdot N_2(t)-A_2(t)\cdot X_2(t)\cdot N_2(t)+A_1(t)\cdot X_2(t)\cdot N_1(t)+A_2(t)\cdot X_1(t)\times\\ \times N_1(t)-B_1^T(t)\cdot X_1(t)\cdot M_2^T(t)+B_2^T(t)\cdot X_2(t)\cdot M_2^T(t)-B_1^T(t)\cdot X_2(t)\cdot M_1^T(t)-\\ -B_2^T(t)\cdot X_1(t)\cdot M_1^T(t)=C_1(t)\cdot N_2(t)+C_2(t)\cdot N_1(t)-C_1^T(t)\cdot M_2^T(t)-\\ -C_2^T(t)\cdot M_1^T(t).\end{cases} \tag{18}$$

Далее систему (18) можно представить в виде следующего гиперматрично-гипервекторно-блочного эквивалента с компактной симметричной структурой

$$\underset{2m\times 2m}{\begin{bmatrix} A_1(t) & -A_2(t)\\ A_2(t) & A_1(t)\end{bmatrix}}\cdot \underset{2m\times 2m}{\begin{bmatrix} X_1(t) & -X_2(t)\\ X_2(t) & X_1(t)\end{bmatrix}}\cdot \underset{2m\times m}{\begin{bmatrix} N_1(t)\\ N_2(t)\end{bmatrix}} - \underset{2m\times 2m}{\begin{bmatrix} B_1^T(t) & -B_2^T(t)\\ B_2^T(t) & B_1^T(t)\end{bmatrix}}\cdot \underset{2m\times 2m}{\begin{bmatrix} X_1(t) & -X_2(t)\\ X_2(t) & X_1(t)\end{bmatrix}}\times$$

$$\times\underset{2m\times m}{\begin{bmatrix} M_1^T(t)\\ M_2^T(t)\end{bmatrix}} = \underset{2m\times 2m}{\begin{bmatrix} C_1(t) & -C_2(t)\\ C_2(t) & C_1(t)\end{bmatrix}}\cdot \underset{2m\times m}{\begin{bmatrix} N_1(t)\\ N_2(t)\end{bmatrix}} - \underset{2m\times 2m}{\begin{bmatrix} C_1^T(t) & -C_2^T(t)\\ C_2^T(t) & C_1^T(t)\end{bmatrix}}\cdot \underset{2m\times m}{\begin{bmatrix} M_1^T(t)\\ M_2^T(t)\end{bmatrix}}. \tag{19}$$

Теперь обозначим

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A_1(t) & -A_2(t)\\ A_2(t) & A_1(t)\end{bmatrix} = \underset{\sim}{A}(t), \quad \begin{bmatrix} B_1^T(t) & -B_2^T(t)\\ B_2^T(t) & B_1^T(t)\end{bmatrix} = \underset{\sim}{B}^T(t),\\[2ex] \begin{bmatrix} C_1(t) & -C_2(t)\\ C_2(t) & C_1(t)\end{bmatrix} = \underset{\sim}{C}(t), \quad \begin{bmatrix} C_1^T(t) & -C_2^T(t)\\ C_2^T(t) & C_1^T(t)\end{bmatrix} = \underset{\sim}{C}^T(t),\\[2ex] \begin{bmatrix} X_1(t) & -X_2(t)\\ X_2(t) & X_1(t)\end{bmatrix} = \underset{\sim}{X}(t),\\[2ex] \begin{bmatrix} N_1(t)\\ N_2(t)\end{bmatrix} = \underline{N}(t), \quad \begin{bmatrix} M_1^T(t)\\ M_2^T(t)\end{bmatrix} = \underline{M}(t), \end{cases} \tag{20}$$

при которых (19) приобретает вид

$$\underset{\sim}{A}(t)\cdot \underset{\sim}{X}(t)\cdot \underline{N}(t) - \underset{\sim}{B}^T(t)\cdot \underset{\sim}{X}(t)\cdot \underline{M}(t) = \underset{\sim}{C}(t)\cdot \underline{N}(t) - \underset{\sim}{C}^T(t)\underline{M}(t), \tag{21}$$

где фигурирует лишь только матрица $\underset{\sim}{X}(t)$.

Далее имеем

$$\begin{gathered}[\underset{2m\times 2m}{\underset{\sim}{A}(t)} \otimes \underset{m\times 2m}{\underline{N}^T(t)} - \underset{2m\times 2m}{\underset{\sim}{B}^T(t)} \otimes \underset{m\times 2m}{\underline{M}^T(t)}]\cdot \underset{4m^2\times 1}{\hat{\underset{\sim}{X}}(t)} = \underset{2m^2\times 4m^2}{\underset{\sim}{D}(t)}\cdot \underset{4m^2\times 1}{\hat{\underset{\sim}{X}}(t)} = \\ = \underset{2m\times 2m}{\underset{\sim}{C}(t)}\cdot \underset{2m\times m}{\underline{N}(t)} - \underset{2m\times 2m}{\underset{\sim}{C}^T(t)}\cdot \underset{2m\times m}{\underline{M}(t)} = \underset{2m^2\times 1}{\hat{D}_1(t)},\end{gathered} \tag{22}$$

откуда при выполнении условия

$$\underset{2m^2\times 4m^2}{rang\underset{\sim}{D}(t)} = 2m^2 \;\Leftrightarrow\; \nexists\, \underset{\sim}{D}^{-1}(t),\; \exists \underset{\sim}{D}^{*}(t) \tag{23}$$

в общем случае будем иметь решение

$$\underset{4m^2\times 1}{\hat{\underset{\sim}{X}}(t)} = \underset{4m^2\times 2m^2}{\underset{\sim}{D}^{+}(t)} \cdot \underset{2m^2\times 1}{\hat{\underset{\sim}{D}}_1(t)} + [\underset{4m^2\times 4m^2}{E} - \underset{4m^2\times 2m^2}{\underset{\sim}{D}^{+}(t)} \cdot \underset{2m^2\times 4m^2}{\underset{\sim}{D}(t)}] \cdot \underset{4m^2\times 1}{W(t)}, \tag{24}$$

где $\underset{\sim}{D}^{+}(t)$ - однопараметрическая обобщённая обратная гиперматрица с размерами $4m^2\times 2m^2$; $\hat{\underset{\sim}{D}}_1(t)$ - однопараметрический гипервектор с размерами $2m^2\times 1$; E - единичная матрица порядка $4m^2$, а $W(t) = (w(t)_1,...,w(t)_{4m^2})^T$ - произвольный однопараметрический корректирующий гипервектор с размерами $4m^2\times 1$.

Замечание 3. Если в (24) имеет место условие

$$\underset{\sim}{D}^{+}(t)\cdot \underset{\sim}{D}(t) = E_{4m^2\times 4m^2}, \tag{25}$$

то при произвольном однопараметрическом корректирующем гипервекторе *W(t)* задача будет обладать единственным решением.

Последовательный численно-аналитический метод решения. Допустим, что для матриц $A(t),\ B(t),\ C(t),\ M(t),\ N(t)$ и $X(t)$ имеют место следующие дифференциальные преобразования [5]:

$$\underset{\sim}{A}(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K \underset{\sim}{A}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty} \doteq \underset{\sim}{A}(t) = \chi_1(t,t_\nu,H,\underset{\sim}{A}(K),\quad K=\overline{0,\ \infty}), \tag{26}$$

$$\underset{\sim}{B}(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K \underset{\sim}{B}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty} \doteq \underset{\sim}{B}(t) = \chi_2(t,\ t_\nu,H,\underset{\sim}{B}(K),K=\overline{0,\ \infty}), \tag{27}$$

$$\underset{\sim}{C}(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K \underset{\sim}{C}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty} \doteq \underset{\sim}{C}(t) = \chi_3(t,t_\nu,H,\underset{\sim}{C}(K),\ K=\overline{0,\ \infty}), \tag{28}$$

$$\underline{M}(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K \underline{M}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty} \doteq \underline{M}(t) = \chi_4(t,t_\nu,H,\underline{M}(K),K=\overline{0,\ \infty}), \tag{29}$$

$$\underline{N}(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K \underline{N}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty} \doteq \underline{N}(t) = \chi_5(t,t_\nu,H,\underline{N}(K),K=\overline{0,\ \infty}), \tag{30}$$

$$\underset{\sim}{X}(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K \underset{\sim}{X}(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty} \doteq \underset{\sim}{X}(t) = \chi_6(t,t_\nu,H,\underset{\sim}{X}(K),K=\overline{0,\ \infty}), \tag{31}$$

где матрицы $\underset{\sim}{A}(K),\ \underset{\sim}{B}(K), \underset{\sim}{C}(K),\ \underline{M}(K),\ \underline{N}(K), \underset{\sim}{X}(K),\quad K=\overline{0,\infty}$ – матричные дискреты матриц $\underset{\sim}{A}(t),\ \underset{\sim}{B}(t), \underset{\sim}{C}(t),\ \underline{M}(t),\ \underline{N}(t),\ \underset{\sim}{X}(t)$ соответственно.

Замечание 4. При существовании матричных дискретов $A(K),\ B(K), C(K),\ M(K),\ N(K)$ и $X(K)$ для матриц $A(t),\ B(t),$ $C(t),\ M(t),\ N(t)$ и $X(t)$ соответственно из соотношений (26)-(31), естественно, следует существование матричных дискретов $A_1(K)$ и $A_2(K)$, $B_1(K)$ и $B_2(K)$, $C_1(K)$ и $C_2(K)$, $M_1(K)$ и $M_2(K)$, $N_1(K)$ и $N_2(K)$, $X_1(K)$ и $X_2(K)$ для матриц $A_1(t)$ и $A_2(t)$, $B_1(t)$ и $B_2(t)$, $C_1(t)$ и $C_2(t)$, $M_1(t)$ и $M_2(t)$, $N_1(t)$ и $N_2(t)$, а также $X_1(t)$ и $X_2(t)$ соответственно.

Теперь однопараметрическую гиперматрично-гипервекторно-блочную линейную систему (22) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. Получим:

при *K*=0:

$$\begin{gathered}[\underset{\sim}{A}(0)\otimes\underline{N}^T(t)-\underset{\sim}{B}^T(0)\otimes\underline{M}^T(0)]\cdot\hat{\underset{\sim}{X}}(0)=\underset{\sim}{D}(0,0)\cdot\hat{\underset{\sim}{X}}(0)=\\ =\widehat{\underset{\sim}{C}(0)\cdot\underline{N}(0)-\underset{\sim}{C}^T(0)\cdot\underline{M}(0)}=\hat{\underset{\sim}{D}}_1(0),\end{gathered}\tag{32}$$

откуда решение системы (32) в общем случае имеет вид

$$\hat{\underset{\sim}{X}}(0)=\underset{\sim}{D}^+(0,0)\ \cdot\hat{\underset{\sim}{D}}_1(0)+[E-\underset{\sim}{D}^+(0,0)\cdot\underset{\sim}{D}(0,0)]\cdot W(0),\tag{33}$$

где $W(0)=(w(0)_1,...,w(0)_{4m^2})^T$ – произвольный числовой корректирующий гипервектор с размерами $4m^2\times1$;

при *K*=1:

$$\begin{gathered}[\underset{\sim}{A}(0)\otimes\underline{N}^T(0)-\underset{\sim}{B}^T(0)\otimes\underline{M}^T(0)]\cdot\hat{\underset{\sim}{X}}(1)+[A(1)\otimes\underline{N}^T(0)+A(0)\otimes\underline{N}^T(1)-\\ -\underset{\sim}{B}^T(1)\otimes\underline{M}^T(0)-\underset{\sim}{B}^T(0)\otimes\underline{M}^T(1)]\cdot\hat{\underset{\sim}{X}}(0)=\\ =\widehat{\underset{\sim}{C}(1)\cdot\underline{N}(0)+\underset{\sim}{C}(0)\cdot\underline{N}(1)-\underset{\sim}{C}^T(1)\cdot\underline{M}(0)-\underset{\sim}{C}^T(0)\cdot\underline{M}(1)}=\hat{\underset{\sim}{D}}_1(1),\end{gathered}\tag{34}$$

откуда в общем случае

$$\begin{gathered}\hat{\underset{\sim}{X}}(1)=\underset{\sim}{D}^+(0,0)\ \cdot[\hat{\underset{\sim}{D}}_1(1)-\underset{\sim}{D}(1,0;0,1)\cdot\hat{\underset{\sim}{X}}(0)]+\\ +[E-\underset{\sim}{D}^+(0,0)\cdot\underset{\sim}{D}(0,0)]\cdot W(1),\end{gathered}\tag{35}$$

где $W(1)=(w(1)_2,...,w(0)_{4m^2})^T$ – произвольный числовой корректирующий гипервектор с размерами $4m^2\times1$;

при *K*=2:

$$[\underset{\sim}{A}(0)\otimes \underline{N}^{T}(0)-\underset{\sim}{B}^{T}(0)\otimes \underline{M}^{T}(0)]\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(2)+[\underset{\sim}{A}(1)\otimes \underline{N}^{T}(0)+\underset{\sim}{A}(0)\otimes \underline{N}^{T}(1)-$$
$$-\underset{\sim}{B}^{T}(1)\otimes \underline{M}^{T}(0)-\underset{\sim}{B}^{T}(0)\otimes \underline{M}^{T}(1)]\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(1)+[\underset{\sim}{A}(2)\otimes \underline{N}^{T}(0)+\underset{\sim}{A}(1)\otimes \underline{N}^{T}(1)+$$
$$+\underset{\sim}{A}(0)\otimes \underline{N}^{T}(2)-\underset{\sim}{B}^{T}(2)\otimes \underline{M}^{T}(0)-\underset{\sim}{B}^{T}(1)\otimes \underline{M}^{T}(1)-\underset{\sim}{B}^{T}(0)\otimes \underline{M}^{T}(2)]\times$$
$$\times\hat{\underset{\sim}{X}}(0)=\underset{\sim}{D}(0,0)\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(2)+\underset{\sim}{D}(1,0;0,1)\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(1)+\underset{\sim}{D}(2,0;1,1;0,2)\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(0)= \qquad (36)$$

$$=\overbrace{\begin{bmatrix}\underset{\sim}{C}(2)\cdot \underline{N}(0)+\underset{\sim}{C}(1)\cdot \underline{N}(1)+\underset{\sim}{C}(0)\cdot \underline{N}(2)- \\ -\underset{\sim}{C}^{T}(2)\cdot \underline{M}(0)-\underset{\sim}{C}^{T}(1)\cdot \underline{M}(1)-\underset{\sim}{C}^{T}(0)\cdot \underline{M}(2)\end{bmatrix}}=\hat{\underset{\sim}{D}}_{1}(2),$$

откуда в общем случае

$$\hat{\underset{\sim}{X}}(2)=\underset{\sim}{D}^{+}(0,0)\cdot[\hat{\underset{\sim}{D}}_{1}(2)-\underset{\sim}{D}(1,0;0,1)\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(1)-\underset{\sim}{D}(2,0;1,1;0,2)\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(0)]+$$
$$+[E-\underset{\sim}{D}^{+}(0,0)\cdot \underset{\sim}{D}(0,0)]\cdot W(2), \qquad (37)$$

где $W(2)=(w(2)_{1},\dots,w(2)_{4m^{2}})^{T}$ – произвольный числовой корректирующий гипервектор с размерами $4m^2\times 1$;

⋮

при *K*=*K*:

$$[\underset{\sim}{A}(0)\otimes \underline{N}^{T}(0)-\underset{\sim}{B}^{T}(0)\otimes \underline{M}^{T}(0)]\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(K)+[\underset{\sim}{A}(1)\otimes \underline{N}^{T}(0)+\underset{\sim}{A}(0)\otimes \underline{N}^{T}(1)-$$
$$-\underset{\sim}{B}^{T}(1)\otimes \underline{M}^{T}(0)-\underset{\sim}{B}^{T}(0)\otimes \underline{M}^{T}(1)]\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(K-1)+\ldots+[\underset{\sim}{A}(K-1)\otimes \underline{N}^{T}(0)+$$
$$+\underset{\sim}{A}(K-2)\otimes \underline{N}^{T}(1)+\ldots+[\underset{\sim}{A}(1)\otimes \underline{N}^{T}(K-2)+\underset{\sim}{A}(0)\otimes \underline{N}^{T}(K-1)-$$
$$-\underset{\sim}{B}^{T}(K-1)\otimes \underline{M}^{T}(0)-\underset{\sim}{B}^{T}(K-2)\otimes \underline{M}^{T}(1)-\ldots-\underset{\sim}{B}^{T}(1)\otimes \underline{M}^{T}(K-2)- \qquad (38)$$
$$-\underset{\sim}{B}^{T}(0)\otimes \underline{M}^{T}(K-1)]\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(1)+[\underset{\sim}{A}(K)\otimes \underline{N}^{T}(0)+\underset{\sim}{A}(K-1)\otimes \underline{N}^{T}(1)+\ldots$$
$$\ldots+\underset{\sim}{A}(1)\otimes \underline{N}^{T}(K-1)+\underset{\sim}{A}(0)\otimes \underline{N}^{T}(K)-\underset{\sim}{B}^{T}(K)\otimes \underline{M}^{T}(0)-$$
$$-\underset{\sim}{B}^{T}(K-1)\otimes \underline{M}^{T}(1)-\ldots-\underset{\sim}{B}^{T}(1)\otimes \underline{M}^{T}(K-1)-\underset{\sim}{B}^{T}(0)\otimes \underline{M}^{T}(K)]\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(0)=$$
$$=\underset{\sim}{D}(0,0)\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(K)+\underset{\sim}{D}(1,0;0,1)\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(K-1)+\ldots+$$
$$+\ldots+\underset{\sim}{D}(K-1,0;K-2,1;\ldots;1,K-2;0,K-1)\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(1)+$$
$$+\underset{\sim}{D}(K,0;K-1,1;\ldots;1,K-1;0,K)\cdot \hat{\underset{\sim}{X}}(0)=$$

$$=\overbrace{\begin{bmatrix}\underset{\sim}{C}(K)\cdot \underline{N}(0)+\underset{\sim}{C}(K-1)\cdot \underline{N}(1)+\ldots+\underset{\sim}{C}(1)\cdot \underline{N}(K-1)+\underset{\sim}{C}(0)\cdot \underline{N}(K)- \\ -\underset{\sim}{C}^{T}(K)\cdot \underline{M}(0)-\underset{\sim}{C}^{T}(K-1)\cdot \underline{M}(1)-\ldots-\underset{\sim}{C}^{T}(1)\cdot \underline{M}(K-1)-C^{T}(0)\cdot \underline{M}(K)]\end{bmatrix}}=$$
$$=\hat{\underset{\sim}{D}}_{1}(K),$$

откуда в общем случае

$$
\begin{aligned}
&\hat{\underset{\sim}{X}}(K) = \underset{\sim}{D}^{+}(0,0)\ \cdot[\hat{\underset{\sim}{D}}_1(K) - \underset{\sim}{D}(1,0;0,1)\cdot\hat{\underset{\sim}{X}}(K-1) - \ldots - \\
&-\underset{\sim}{D}(K,0;K-1,1;\ldots;1,K-1;0,K)\cdot\hat{\underset{\sim}{X}}(0)] + \\
&+[E - \underset{\sim}{D}^{+}(0,0)\cdot\underset{\sim}{D}(0,0)]\cdot W(K),
\end{aligned}
\tag{39}
$$

где $W(K) = \left(w(K)_1,\ \ldots, w(K)_{4m^2}\right)^T$ - произвольный числовой корректирующий гипервектор с размерами $4m^2 \times 1$.

Замечание 5. Если в представлениях (33), (35), (37), …, (39) имеет место условие

$$
\underset{\sim}{D}^{+}(0,0)\cdot\underset{\sim}{D}(0,0) = E_{4m^2\times 4m^2}\,,
\tag{40}
$$

то при произвольных числовых корректирующих гипервекторах $W(0)$, $W(1)$, $W(2)$,…, $W(K)$ задача будет обладать единственным решением.

Параллельный численно-аналитический метод решения. Теперь объединим соотношения (32), (34), (36), …, (38) в одно целое. Получим следующую суперматрично-супервекторно-блочную систему уравнений:

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\underset{\sim}{D}(0,0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
\underset{\sim}{D}(1,0;0.1) & \underset{\sim}{D}(0,0) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline
\underset{\sim}{D}(2,0,\ldots,0,2) & \underset{\sim}{D}(1,0;0.1) & \underset{\sim}{D}(0,0) & \cdots & 0 \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline
\underset{\sim}{D}(K,0,\ldots,0,K) & \underset{\sim}{D}(K-1,\ldots,K-1) & \underset{\sim}{D}(K-2,\ldots,K-2) & \cdots & \underset{\sim}{D}(0,0)
\end{array}\right]
\cdot
\left[\begin{array}{c}
\hat{\underset{\sim}{X}}(0) \\ \hdashline
\hat{\underset{\sim}{X}}(1) \\ \hdashline
\hat{\underset{\sim}{X}}(2) \\ \hdashline
\vdots \\ \hdashline
\hat{\underset{\sim}{X}}(K)
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\hat{\underset{\sim}{D}}_1(0) \\ \hdashline
\hat{\underset{\sim}{D}}_1(1) \\ \hdashline
\hat{\underset{\sim}{D}}_1(2) \\ \hdashline
\vdots \\ \hdashline
\hat{\underset{\sim}{D}}_1(K)
\end{array}\right],
\tag{41}
$$

или в компактной записи:

$$
\underset{2\cdot(K+1)m^2\times 4\cdot(K+1)m^2}{\underset{\sim}{Д}(\bullet)}\cdot\underset{4\cdot(K+1)m^2\times 1}{\hat{\underset{\sim}{X}}(\bullet)} = \underset{2\cdot(K+1)m^2\times 1}{\hat{\underset{\sim}{Д}}_1(\bullet)}\,,
\tag{42}
$$

откуда в общем случае

$$
\hat{\underset{\sim}{X}}(\bullet) = \underset{\sim}{Д}^{+}(\bullet)\cdot\hat{\underset{\sim}{Д}}_1(\bullet) + \left[E - \underset{\sim}{Д}^{+}(\bullet)\cdot\underset{\sim}{Д}(\bullet)\right]\cdot W(\bullet),
\tag{43}
$$

где $\underset{\sim}{Д}^{+}(\bullet)$ - числовая обобщенно–обратная суперматрица с размерами $4\cdot(K+1)\cdot m^2\times\ \ 2\cdot(K+1)\cdot m^2$; $\hat{\underset{\sim}{Д}}_1(\bullet)$ - числовой супервектор с размерами $2\cdot(K+1)\cdot m^2\times 1$; $\hat{\underset{\sim}{X}}(\bullet)$ - числовой супервектор с размерами $4\cdot(K+1)\cdot m^2\times 1$;

$W(\bullet)$- произвольный числовой корректирующий супервектор также с размерами $4\cdot(K+1)\cdot m^2\times 1,$ причем

$$\underset{\sim}{Д}^{+}(\bullet)=\left[\begin{array}{c:c:c:c} Д_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline Д_1 & Д_0 & \cdots & 0 \\ \hdashline Д_2 & Д_1 & \cdots & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline Д_K & Д_{K-1} & \cdots & Д_0 \end{array}\right], \tag{44}$$

где

$$\begin{cases} Д_0=\underset{\sim}{D}^{+}(0,0), \\ Д_1=-\underset{\sim}{D}^{+}(0,0)\cdot \underset{\sim}{D}(1,0;0,1)\cdot \underset{\sim}{D}^{+}(0,0), \\ Д_2=-\underset{\sim}{D}^{+}(0,0)\cdot\left[\underset{\sim}{D}(1,0;0,1)\cdot \overset{+}{\underset{\sim}{D}}(0,0)\cdot \underset{\sim}{D}(1,0;0,1)\cdot \overset{+}{\underset{\sim}{D}}(0,0)-\underset{\sim}{D}(2,0;1,1;0,2)\cdot \overset{+}{\underset{\sim}{D}}(0,0)\right], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Д_K=-\underset{\sim}{D}^{+}(0,0)\cdot\sum\limits_{P=1}^{K}Д(P)\cdot Д_{K-P}. \end{cases} \tag{45}$$

Заключение. Таким образом, организуя вычислительные процедуры (33), (35), (37), …, (39) при последовательном численно-аналитическом методе, а также вычислительные процедуры (43)-(45) при параллельном численно-аналитическом методе и определив гиперматричные дискреты $\underset{\sim}{\hat{X}}(K)$, $K=\overline{0,\infty}$ или суперматричные дискреты $\underset{\sim}{\hat{X}}(\bullet)$, $K=\overline{0,\infty}$ соответственно, далее согласно (31) можно определить решения исходной задачи (1). Естественно, при этом широко могут быть использованы средства современных информационных технологий [6,7].

Литература

1. **Симонян С.О.** К решению однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра $A(t)\cdot X(t)\quad +X^T(t)\cdot B(t)=C(t)$ // Известия НАН РА И НПУА. Серия Техн. наук.– 2016. - Т. LXIX, №1. – С. 49-60.
2. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. - М.: Наука, 2010. – 560 с.
3. **Симонян С.О.** О неоднозначной разрешимости однопараметрических транспонированных аналогов матричных уравнений типа Сильвестра

$A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$ (Прямой подход) // Известия НАН РА и НПУА. Серия Техн. наук.-2018.- Т. LXXI, N2.

4. **Симонян С.О.** Методы определения однопараметрических обобщенных обратных матриц.- Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017.- 222 c.
5. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с.
6. **Straustrup B.** The C++ Programming Language. - 4th Edition. - Boston: Addison – Wesleg professional, 2013. – 1368 p.
7. **Метьюз Дж. Г., Финк К.Д.** Численные методы. Использование Matlab.- М.: Вильямс, 2001.-720 с.

Поступила в редакцию 10.01.2018.
Принята к опубликованию 05.06.2018.

ՍԻԼՎԵՍՏՐԻ ՏԻՊԻ $A(t) \cdot X(t) + X^T(t) \cdot B(t) = C(t)$ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՏՐԱՆՍՊՈՆԱՑՎԱԾ ՆՄԱՆԱԿՆԵՐԻ ՈՉ ՄԻԱՐԺԵՔ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

(դեկոմպոզիցիոն մոտեցում)

Ս.Հ. Սիմոնյան

Առաջարկվել են Սիլվեստրի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարում-ների տրանսպոնացված նմանակների միայն որոշման ենթակա անհայտ մատրից պարունակող ռեդուցված համարժեք խնդրի լուծման անալիտիկ, ինչպես նաև հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն եղանակներ՝ անալիտիկ և հաջորդական թվա-անալիտիկ եղանակների հիպերռեգուլյարության համապատասխան պայմանների, ինչպես նաև զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակի սուպերռեգուլյարության պայմանի տեղի չունենալու (միարժեք լուծելիության համապատասխան պայմանների տեղի չունենալու) դեպքերում: Չնայած այն բանին, որ անալիտիկ եղանակը, ընդհանուր դեպքում, սահմանափակ է գործնական կիրառություններում, այնուամենայնիվ, այն հիմք է ծառայում հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակների մշակման համար: Վերջիններս որոշակիորեն լրացնում են դիտարկվող տիրույթում գոյություն ունեցող բացը: Բոլոր եղանակների դեպքերում էլ լայնորեն է օգտագործվում մատրիցների կրոնեկերյան արտադրյալների ապարատը, իսկ թվա-անալիտիկ եղանակների դեպքում՝ նաև Գ.Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունները, որոնք սկզբունքորեն տարբերվում են հայտնի ինտեգրալային ձևափոխություններից և վերջիններիս համեմատությամբ աչքի են ընկնում որոշակի դրական հաշվողական բնութագրերով:

Առաջարկված բոլոր եղանակների դեպքերում էլ դիտարկվել են նաև խնդրի միարժեք լուծելիության հարցերը (խնդրի եզակի լուծումների հարցերը համապատասխան եղանակ-ների դեպքերում) կամայական կոռեկտոր հիպերվեկտորների դեպքերում՝ անալիտիկ և

հաջորդական թվա-անալիտիկ եղանակների դեպքում և կամայական կոռեկտող սուպեր-վեկտորների պարագայում՝ զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակի դեպքում։

Առանցքային բառեր. Սիլվեստրի տիպի միապարամետրական մատրիցային հավասարումների տրանսպոնացված համարժեք, ռեգուլյարության, հիպերռեգուլյարության, սուպերռեգուլյարության պայմանների տեղի չունենալը, կամայական կոռեկտող հիպերվեկ-տորներ, կամայական կոռեկտող սուպերվեկտորներ, անալիտիկ, հաջորդական և զուգահեռ թվա-անալիտիկ եղանակներ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, տեղեկատվական տեխնոլո-գիաների ժամանակակից միջոցներ։

ON THE UNKNOWN-SIGNIFICABLE SOLVABILITY OF ONE-PARAMETER TRANSPONED ANALOGUES OF SILVESTER-TYPE MATRIX EQUATIONS $A(t)\cdot X(t)+X^T(t)\cdot B(t)=C(t)$ (Decomposition approach)

S.H. Simonyan

Decompositional analytical, as well as sequential and parallel numerical-analytical methods for solving one-parameter transposed analogues of Sylvester-type matrix equations are proposed in case of failure to meet the corresponding hyperregularity conditions for analytical and sequential numerical-analytical methods, as well as for non-fulfillment of the superregularity condition for a parallel numerical-analytical method of the corresponding conditions for unique solvability) of the reduced equivalent which contains only the unknown matrix to be determined. Although the analytical method is generally limited in practical applications, it serves as a basis for the development of sequential and parallel numerical-analytical methods. The latter, in a certain way, supplement the existing gap in the area under consideration. In all methods, the apparatus of the Kronecker products of matrices is widely used, and in the numerical-analytical methods - the differential transformations of G.E. Pukhov, fundamentally different from the known integral transformations and possessing certain positive computational characteristics in comparison with the latter. Issues on the unambiguous solvability of the problem (uniqueness of solutions under appropriate methods) are also considered, using arbitrary correcting hypervectors in analytical and sequential numerical-analytical methods, and arbitrary corrective supervectors with the parallel numerical-analytical method.

Keywords: one-parameter transposed analogue of Sylvester-type matrix equations, non-fulfillment of regularity conditions, hyperregularity, superregularity, arbitrary corrective hypervectors, arbitrary corrective supervectors, analytical, sequential and parallel numerical-analytical methods, differential transformations, modern means of information technologies.